

1. Формулировка задачи оптимизации поиска равновесных объемов и цен в сетевом аукционе поставщиков и потребителей одного товара с ограничениями на передачу

Рассмотрим рынок. Пусть на рынке спрос соответствует V . Каждый поставщик на рынке характеризуется следующими параметрами: V_i - объем поставки, c_i - цена за товар i -го поставщика. Заявки поставщиков упорядочиваются по возрастанию: $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$.

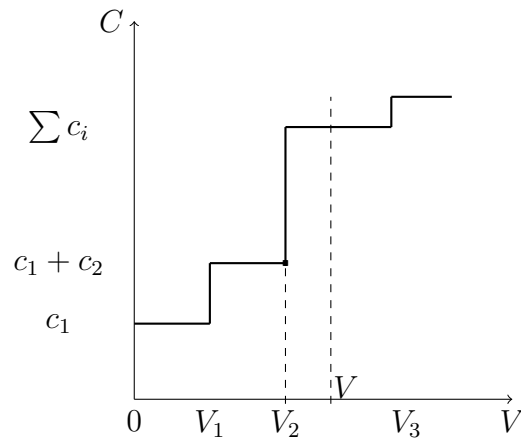


Рис. 1: Спрос и предложение

Два основных подхода:

1) Маржинальное ценообразование: выбирается максимальная цена, объем которой был выбран рынком (c_k) (Рис.2)

$$\hat{V}_k = V - \sum_{i=1}^{k-1} V_i,$$

$$c_k,$$

$$\hat{V}_k \leq V_k.$$

2) Ценообразование по заявке: цены соответствуют заявкам. (Рис.3)

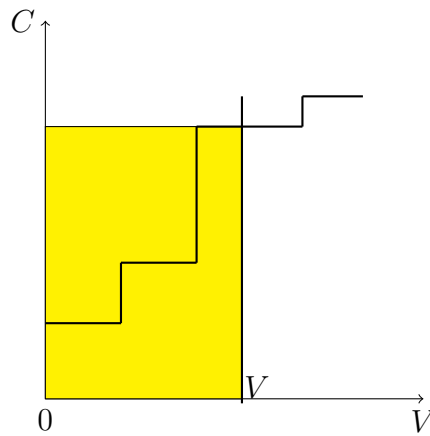


Рис. 2: Маржинальное ценообразование

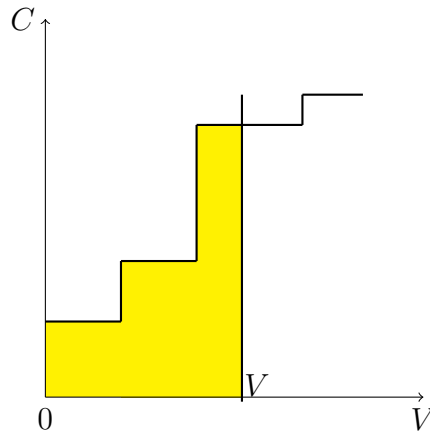


Рис. 3: Ценообразование по заявке

Пусть x_i - объем поставщика i . Ставится следующая задача оптимизации:

$$\begin{cases} \min_x \sum_{i=1}^n c_i x_i, \\ 0 \leq x_i \leq V_i, \\ \sum_{i=1}^n x_i = V. \end{cases}$$

Решение этой задачи - это решение аукциона маржинальной цены - множителем Лагранжа (wtf?).

Пусть x_i - объем, принятый у i -го поставщика, $x_i \in [0; V_i]$. Им соответствуют цены

$p_i, i = \overline{1, n}$. Тогда задача оптимизации следующая:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}}, \\ x_i \leq V_i, (\pi_i^+), \\ 0 \leq x_i, (\pi_i^+), \\ \sum_{i=1}^n x_i = V_c, (\lambda_0). \end{cases}$$

В скобках помечены множители Лагранжа, соответствующие ограничениям задачи, каждый из них - неотрицательное число. Так как поставщиков n , то ограничений $2n + 1$ (для первого и второго по n , плюс третье).

Таким образом, можем составить функцию Лагранжа для нашей задачи оптимизации:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x),$$

$$L(x, \lambda_0, \pi) = \langle p, x \rangle + \lambda_0 (\langle e, x \rangle - V_c) + \sum_{i=1}^n (\langle e_i, x \rangle - V_i) \pi_i^+ - \sum_{i=1}^n (\langle e_i, x \rangle) \pi_i^-,$$

где $\lambda_0 \geq 0, \pi_i^+ \geq 0, \pi_i^- \geq 0$.

Теорема (Куна-Таккера): для того чтобы пара векторов p^*, x^* являлась решением задачи оптимизации необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $\lambda_0^* \geq 0, \pi_i^* \geq 0$, что $(x^*, \lambda_0^*, \pi^*)$ являлась седловой точкой функции Лагранжа соответствующей задаче.

Ищем седловую точку функции Лагранжа. Для этого берем производную.

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, \lambda_0, \pi)}{\partial x_i} = p_i + \lambda_0 + \pi_i^+ - \pi_i^- = 0, \\ (\langle e_i, x \rangle - V_i) \pi_i^+ = 0, \\ (x_i - V_i) \pi_i^+ = 0, \\ x_i \pi_i^- = 0. \end{cases}$$

Поясним смысл множителей Лагранжа: $-\lambda_0$ - равномерная маржинальная цена аукциона, π_i^+ - прибыль i -го поставщика, π_i^- - убыток i -го поставщика. Из системы получаем следующее выражение:

$$p_i + \pi_i^+ - \pi_i^- = -\lambda_0.$$

Пусть $x_i^* > 0$. Тогда из четвертого уравнения системы получаем, что $\pi_i^{*-} = 0$ и соответственно $p_i + \pi_i^+ = -\lambda_0$.

Пусть $x_i^* = 0$. Тогда из третьего и четвертого уравнения системы получаем, что $\pi_i^* = 0$ и соответственно $p_i = -\lambda_0$.

$x_i \in [0; V_i], \frac{d}{dV_c} \langle p, x(V_c) \rangle = -\lambda_0(V_c)$, где $-\lambda_0(V_c)$ показывает чувствительность.

Применительно к рынкам электроэнергии выделяют два вида аукционов: либо это **односторонний аукцион**, где предложение основано на ценовых заявках продавцов, а спрос покупателей оценивается системным оператором (балансирующий рынок), либо **двусторонний аукцион**, когда и покупатели, и продавцы подают ценовые заявки.

Балансирующий – как и во всех других рынках должна существовать купля-продажа не только плановых объемов, но и фактических объемов производства/потребления электроэнергии. Эту задачу в российском рынке решает балансирующий рынок.

Простой аукцион единая цена – аукцион с учетом пропускной способности, основанный на зональном ценообразовании. В таком аукционе энергосистема разделяется на зоны, в каждой из которых рассчитывается своя единая равновесная цена (зональная цена) и определяются принятые объемы. Цены и объемы складываются под воздействием спроса и предложения участников рынка внутри зоны, а также с учетом перетоков электрической энергии из других зон;

Аукцион с учетом пропускной способности зональные пены – аукцион с учетом потерь и полной картины электрических режимов (условий потока распределения) в единой электрической сети.

Аукцион с учетом всех системных ограничений узловые цены

Последние два аукциона называются **распределенными**. В них решается задача поиска равновесной точки при учете связанных ограничений, обусловленных сетевой структурой электрической системы, и определяется своя равновесная цена в каждом узле/зоне. Заметим, что если бы в сети не было потерь и ограничений пропускной способности, то цена за электрическую энергию и в самом деле была бы одинакова по всей энергетической системе. Однако из-за их наличия (ограничений или потерь) возникает дифференциация цен. Распределенные аукционы рекомендуются не только электроэнергетике, но, к примеру, в рынках газа – в любых рынках, где существенна транспортная составляющая в цене.

Свойства узловых цен

Равновесные узловые цены на электрическую энергию определяются для каждого узла расчетной модели с соблюдением нижеперечисленных условий:

- а) равновесные цены на электрическую энергию одинаковы для всех объемов электрической энергии, точка поставки которых отнесена к одному узлу расчетной модели;
- б) для поставщика электрической энергии равновесная цена не может быть ниже цены, указанной им в ценовой заявке на объем электрической энергии, отнесенный к соответствующему узлу расчетной модели и прошедший (принятый) в аукционе, и не может быть выше цены, указанной им в заявке на непрошедший в аукционе объем;
- в) для покупателя электрической энергии равновесная цена не может быть выше цены, указанной им в ценовой заявке на объем электрической энергии, прошедший (принятый) в аукционе, но и не может быть ниже цены, указанной им в ценовой заявке на тот объем, который оказался непринятым в аукционе;

г) равновесные цены на электрическую энергию должны отражать влияние системных ограничений и стоимость потерь электрической энергии, зависящих от электроэнергетических режимов.

Формулы заданы в предыдущем билете.

$$\max_x \langle c, x \rangle = - \min \langle c, x \rangle$$

$$\lambda: Ax = b$$

$$u \geq x \geq l$$

$$0 \leq \mu: Dx \leq d$$

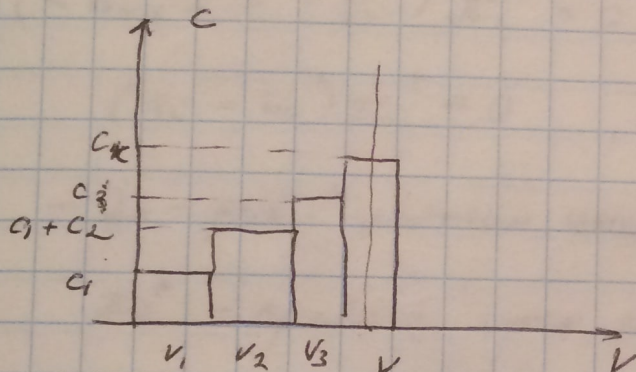
$$L(x, \lambda) = \langle c, x \rangle + \langle \lambda, Ax - b \rangle + \langle \mu, Dx - d \rangle$$

Аукцион

Спрос V

Поставщики V_i, c_i

$$c_1 \leq \dots \leq c_n$$



- 1) Маргинальное ценообразование
цена опр-ия по заявке c_k

Аукцион
выявляет
предпочтения

$$1, \dots, k$$

$$V_i, i = 1, \overline{k-1}$$

$$\overline{V_k} = V - \sum_{i=1}^{k-1} V_i \quad ; \quad \overline{V_k} \leq V_k$$

- 2) По заявке

Честная стратегия не явл-ся равновесной

1) Актуален при условии совершен. конкуренции:
участников много

Мат. модель аукциона

x_i - объем, кот. примет y данного поставщика

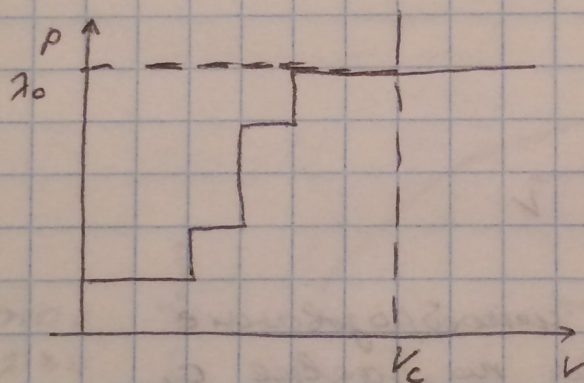
$$0 \leq x_i \leq V_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = V$$

$$\min_x \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

Р/з: решение задачи это решение аукциона
макс. цена - мин. лагранжа

5 октября 2016



x_i - объем приобретаемый у i -ого поставщика

$$x_i \in [0; V_i], p_i, i = \overline{1, n}$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

$$\lambda_0 \quad \sum_{i=1}^n x_i = V_c$$

мин-м
лагранжа

2n ограничений $0 \leq x_i \leq V_i$

$$\begin{aligned} x_i &\leq V_i & \pi_i^+ \\ -x_i &\leq 0 & \pi_i^- \end{aligned}$$

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_i g_i(x)$$

$$L(x, \lambda_0, \pi) = \langle p, x \rangle + \lambda_0 (\langle e, x \rangle - V_0) + \sum_{i=1}^n (\langle e_i, x \rangle - V_i) \pi_i^+ - \sum_{i=1}^n (\langle e_i, x \rangle) \pi_i^-$$

$\pi_i^+ \geq 0$
 $\pi_i^- \geq 0$

$$\nabla_x L(x, \lambda^*) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(x, \lambda_0, \pi) = p_i + \lambda_0 + \pi_i^+ - \pi_i^- = 0$$

$$(\langle e_i, x \rangle - V_i) \pi_i^+ = 0$$

$$(x_i - V_i) \pi_i^+ = 0, \quad x_i \pi_i^- = 0$$

$-\lambda_0$ - равн. максим. цена аукциона

π_i^+ - прибыль i -ого поставщика

π_i^- - убыток i -ого поставщика

$$p_i + \pi_i^+ - \pi_i^- = -\lambda_0$$

$$x_i^* > 0 \Rightarrow \pi_i^- = 0$$

$$p_i + \pi_i^+ = -\lambda_0$$

$\downarrow$
0

$$x_i^* = 0 \Rightarrow p_i - \pi_i^- = -\lambda_0$$

$\downarrow$
0

$$\pi_i^+, \pi_i^- = 0 \Rightarrow p_i = -\lambda_0$$

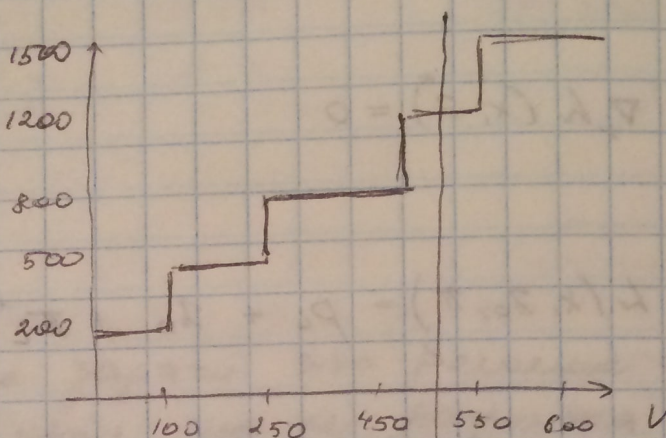
$$x_i \in [0; V_i]$$

$$\frac{d}{dV_c} \langle p, x(V_c) \rangle = -\lambda_0(V_c)$$

показывает чувствительность

Пример:

	p	V
1	200	100
2	500	150
3	300	200
4	1200	100
5	1500	50



$$V_c = 500$$

$$\lambda_0 = -1200$$

$$V_c = 550 \Rightarrow \forall \lambda_0 \in [1200, 1500]$$

выпол-ся усл-я Куна-Таккера

$$\min_x \langle p, x \rangle + \lambda_0 (\langle e, x \rangle - V_c)$$

$0 \leq x_i \leq V_i$

$$(\lambda^*, x^*)$$

$$\max_{\lambda} \min_x L(x, \lambda)$$

$$\min_x \sum_{i=1}^n (p_i + \lambda_0) x_i - \lambda_0 V_c =$$

$$= \min_x - \sum_{i=1}^n \underbrace{(-\lambda_0 - p_i)}_{\text{прибыль } i\text{-ого поставщика}} x_i - \lambda_0 V_c$$

прибыль i-ого поставщика

$$\min_{0 \leq x_i \leq v_i} -(-\lambda_0 - p_i) x_i = -\max_{0 \leq x_i \leq v_i} (-\lambda_0 - p_i) x_i$$

макс.-я индив. полезности

$$0 \leq x_i \leq v_i, \quad i = \overline{1, n}$$

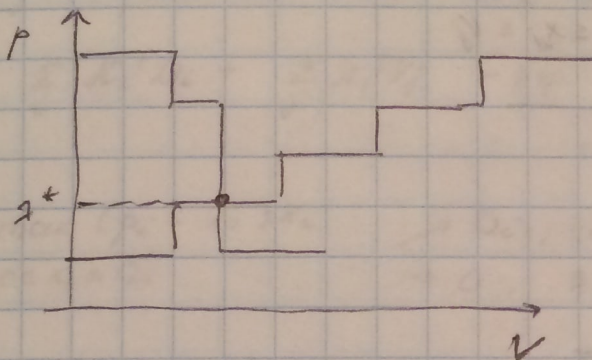
p_i

π_i^+

$$0 \leq y_j \leq D_j, \quad j = \overline{1, m}$$

p_j

π_j^+



$$\sum_{j=1}^m p_j y_j - \sum_{i=1}^n p_i x_i \rightarrow \max_{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m}$$

Функция
благополучия

$$\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^m y_j = 0 \quad \lambda_0$$

$$\nabla_{(x,y)} L(x,y, \lambda, \pi) = 0$$

$f(x) = \sum \mu_i g_i(x)$ - функция Лагранжа для max

$$p_j - (-\lambda_0 + \pi_j^+ - \pi_j^-) = 0, \quad j = \overline{1, m}$$

$$-p_i - (\lambda_0 + \pi_i^+ - \pi_i^-) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

$$p_j + \lambda_0 - \pi_j^+ + \pi_j^- = 0$$

$$\text{равн. цен } -\lambda_0 = p_j - \pi_j^+ + \pi_j^-$$

$$-p_i - \lambda_0 - \pi_i^+ + \pi_i^- = 0; \quad -\lambda_0 = p_i + \pi_i^+ - \pi_i^-$$

11.10.2016.

$$\sum_{i=1}^m p_i x_i - \sum_{j=1}^n p_j x_j \rightarrow \max$$

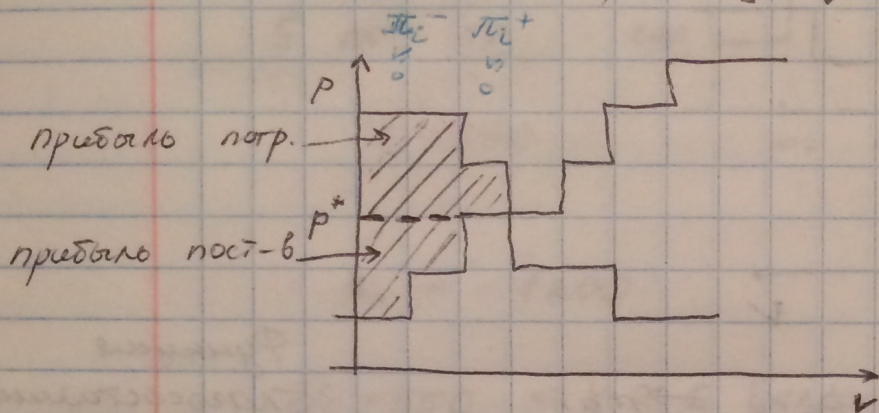
p_i - цена i -ого потребителя

(p_i, D_i) - потребитель

(p_j, V_j) - поставщик

$$\lambda_0 \quad \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n x_j = 0 \quad \pi_i^0 \quad \pi_j^+ + \pi_j^- = 0$$

$$0 \leq x_i \leq D_i, \quad 0 \leq x_j \leq V_j$$



$$p_i = \lambda^0 + \pi_i^+ - \pi_i^-$$

$$-p_j = -\lambda^0 + \pi_j^+ - \pi_j^-$$

$$1) x_i > 0 \Rightarrow \pi_i^- = 0 \Rightarrow p_i = \lambda^0 + \pi_i^+ \Rightarrow p_i \geq \lambda^0$$

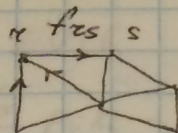
$$2) x_j > 0 \Rightarrow \pi_j^- = 0 \Rightarrow \lambda^0 = p_j + \pi_j^+$$

$$L(x_i, x_j, \lambda^0, \pi) = \sum_i p_i x_i - \sum_j p_j x_j - \lambda^0 (\sum_i x_i - \sum_j x_j) - \sum_i \pi_i^+ (x_i - D_i) + \sum_i \pi_i^- x_i -$$

$$- \sum_j \pi_j^+ (x_j - V_j) + \sum_j \pi_j^- x_j = \sum_i (p_i - \lambda^0 - \pi_i^+ + \pi_i^-) x_i -$$

$$- \sum_j (p_j + \lambda^0 + \pi_j^+ - \pi_j^-) x_j + \sum_i \pi_i^+ D_i + \sum_j \pi_j^+ V_j$$

"о при опт. решении



Граф

$$\sum_{s \in A(z)} f_{zs} = \sum_{i \in z} x_i - \sum_{j \in z} x_j \quad \forall z$$

$A(z)$ - мн-во всех узлов, кон. имеют с узлом z ребра

$$f_{zs} \leq \bar{f}_{zs}$$

$$-f_{zs} \leq \bar{f}_{zs}$$

19.10.16

$$\sum_{i=1}^m p_i x_i - \sum_{j=1}^n p_j x_j \rightarrow \max$$

$$0 \leq x_i \leq d_i \quad \pi_i^-, \pi_i^+$$

$$0 \leq x_j \leq v_j \quad \pi_j^-, \pi_j^+$$

λ_z

$$\sum_{s \in A(z)} f_{zs} - \sum_{s \in B(z)} f_{sz} = \sum_{j \in z} x_j - \sum_{i \in z} x_i \quad \forall z$$

мн-м

направлен

$$\forall z \quad A(z) = \{s \mid \exists (z, s)\}$$

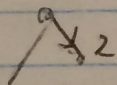
$$B(z) = \{s \mid \exists (s, z)\}$$

$$f_{zs} \leq f_{zs} \leq \bar{f}_{zs}$$

$$0 \leq \bar{G}_{zs}^- \quad \bar{G}_{zs}^+ \geq 0$$

$$\sum v_i \geq \sum d_i$$

$z=1$
 $s=2$



$$1: -f_{21} \quad \lambda_z$$

$$2: f_{21} \quad \lambda_s$$

$$-\lambda_z + \lambda_s$$

$$\nabla_{(x,f)} L(x, f, \lambda, \bar{G}, \pi) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_{zs}} : 0 = \lambda_z - \lambda_s + \bar{G}_{zs}^+ - \bar{G}_{zs}^-$$

$$(\lambda_s - \lambda_z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}$$

$$p_i = \lambda_i + \pi_i^+ - \pi_i^-$$

$\forall i$

$$x_i^* > 0$$

$$\pi_i^- = 0$$

$$\pi_i^+ \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}$$

$$-p_j = -\lambda_j + \pi_j^+ - \pi_j^-$$

$\forall j$

$$\pi_i^+ > 0 \Rightarrow x_i^* = D_i$$

λ_z - цена

$$x_j^* > 0$$

$$\pi_j^- = 0$$

$$\lambda_z = p_j + \pi_j^+ > 0$$

$$\Rightarrow x_j^* = V_j$$

$$x_i^* = 0 \Rightarrow \pi_i^+ = 0 \Rightarrow \dots$$

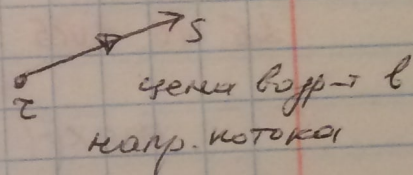
①

$$\lambda_z < f_{zs} \Rightarrow G_{zs}^+ = G_{zs}^- = 0$$

②

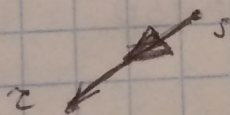
$$f_{zs} = \bar{f}_{zs} \Rightarrow G_{zs}^- = 0 \Rightarrow \lambda_s \geq \lambda_z$$

$$G_{zs}^+ \geq 0$$



③

$$\lambda_s \leq \lambda_z$$



Подставляем решение в ур. баланса:

$$0 = \sum_z \lambda_z \left(\sum_{s \in A(z)} f_{zs} - \sum_{t \in B(z)} f_{tz} - \left(\sum_{j \in z} x_j - \sum_{i \in z} x_i \right) \right) =$$

$$= \sum_{(zs)} f_{zs} (\lambda_s - \lambda_z) - \left(\sum_z \lambda_z \sum_{j \in z} x_j - \sum_{i \in z} \lambda_z x_i \right) =$$

сумма поставщиков

сумма с потребителей

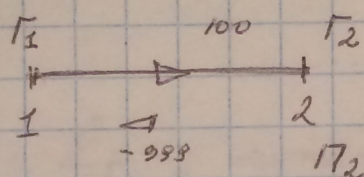
$$\Rightarrow \sum_i \left(\lambda_i \sum_{j \in Z} x_j - \lambda_j \sum_{i \in Z} x_i \right) = \sum_{(i,j)} f_{ij} (\lambda_j - \lambda_i)$$

① σ_{ij}^+
 $f_{ij} \sigma_{ij}^+$

$$f_{rs} (\lambda_s - \lambda_r) = \begin{cases} \sigma_{rs}^+ f_{rs} \geq 0 \\ -\sigma_{rs}^- f_{rs} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{f_{rs}} \leq 0$$

Д/з



$$V_2 = 100 ; P_2 = 800$$

$$D_2 = 150, \text{ цена моб.}$$

$$V_1 = 200$$

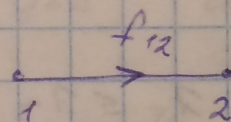
$$p_1 = 500$$

26.10.2015

$$\max(-2000y, 500x_1 + 800x_2)$$

$$0 \leq x_1 \leq 200$$

$$0 \leq x_2 \leq 100, \quad 0 \leq y_1 \leq 150$$

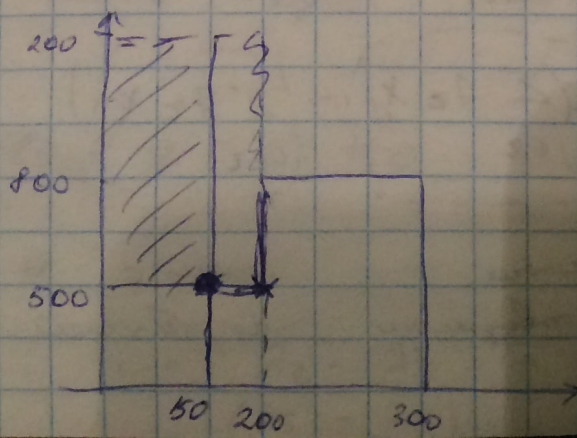


$$f_{12} = x_1$$

$$\lambda_1$$

$$-f_{12} = x_2 - 150 \quad \lambda_2$$

$$f_{12} \leq 100 \quad \sigma$$



$$x_1^* = 100$$

$$x_2^* = 50$$

$$y_1^* = 150$$

$$\sum_s C_s V_s \rightarrow \min$$

$$\lambda_e - \lambda_i > C_s$$

$$\lambda_e - \lambda_i \leq C_s$$

$$V_s (\lambda_e^c - \lambda_i^c)$$

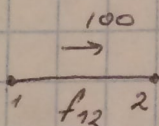
$\sum_s V_s (\lambda_e^c - \lambda_i^c)$ - все участники ролеок рожили
запятые $\Rightarrow$ сохр-е ли баланс?

11.16

FTR

$\hookrightarrow$ FG

$\hookrightarrow$ PTP



$$200(\lambda_2 - \lambda_1)$$

	V	C	AA
Γ_1	220	500	-200
Γ_2	150	800	
Π_1	110	∞	
Π_2	200	∞	200

x - объем прав
пер. в узле 1
ком. в узле 2

$$f_{12} = x \quad \lambda_1$$

$$-f_{12} = -x \quad \lambda_2$$

$$f_{12} \leq 100 \quad \bar{f}$$

$$0 \leq x \leq 200 \quad \pi^+ / -$$

$$C_T x \rightarrow \max_{f_{12}, x}$$

C_T - макс. цена за право передачи

$$L = C_T x - \lambda_1 (f_{12} - x) + \lambda_2 (f_{12} - x) - \bar{G} (f_{12} - 100) - \pi^+ (x - \bar{x}) + \pi^- x$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = C_T + \lambda_1 - \lambda_2 - \pi^+ + \pi^- = 0$$

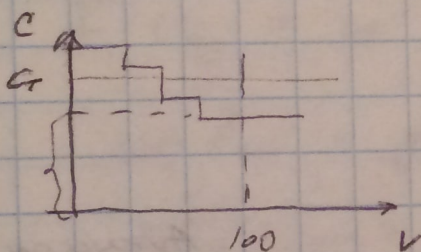
$$\frac{\partial L}{\partial f_{12}} = -\lambda_1 + \lambda_2 - \beta = 0$$

$$x^0 = 100, \quad f_{12}^0 = 100 \quad \Rightarrow \pi^+ = 0$$

$$\pi^- = 0$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = C_T$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \beta, \quad \beta = C_T$$



$$100(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$+ \frac{V_{DA}}{200} (\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$(V_{DA} - 100)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

x - упр. отвечает поставщиков
 y - потребителей

$u = x - y$
 чистое узловые нагрузки

f - вектор потоков

$$\lambda \quad Af - u = 0$$

$$I, n: \quad \sum_{s \in A(z)} f_{zs} - \sum_{k \in B(z)} f_{kz} - (x_z - y_z) = 0$$

матрица A
 $n \times l$

$$f \leq \bar{f}, \quad f \in \mathbb{R}^l$$

$$u = x - y$$

$$\pi \quad 0 \leq x \leq \bar{x}$$

$$0 \leq y \leq \bar{y}$$

$$C_1, C_2$$

$$C_1 x - C_2 y \rightarrow \max$$

$\Rightarrow$

$$(x^0, y^0, f^0, \lambda^0 \in \mathbb{R}^n, \beta^0, \pi^0)$$

Анализ на
связи вперед

$$\lambda^0{}^T u^0 \leq 0$$

$$\lambda^0{}^T (x^0 - y^0) = \lambda^0{}^T x^0 - \lambda^0{}^T y^0$$

сумма разностей

пол. порождаемых

ком. рожиной пол-то генераторы

$$\lambda^0{}^T y^0 = \lambda^0{}^T A f^0$$

$$\frac{\partial L}{\partial f} = -\lambda^T A + \beta^T = 0$$

$$\lambda^T A = -\beta^T$$

$$L(x, y, \lambda, \beta, \pi) = C_1 y - C_2 x - \lambda^T (A f - u) - \beta^T (f - \bar{f}) - \pi$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = c_n - \lambda - \pi_y^+ + \pi_y^- = 0$$

$$c_n = \lambda + \pi_y^+ - \pi_y^-$$

$$\lambda^{0T} A f^0 = -\sigma^{0T} f^0 = -\sigma^{0T} \bar{f} \leq 0$$

$$\sigma^{0T} (f^0 - \bar{f}) = 0, \sigma^{0T} \geq 0, \bar{f} \geq 0$$

$$w \in \mathbb{R}^n$$

$$i, j: v_{ij} = (0, \dots, 0, \overset{i}{v}, \dots, \overset{j}{-v}, \dots, 0)$$

$$\sum v_{ij} = w$$

w, f_w - сопряженная пара

$$A f_w - w = 0$$

$$f_w \leq \bar{f}$$

$$\sigma^{0T} f_w \leq \sigma^{0T} \bar{f}$$

$$(\lambda_i - \lambda_j) v$$

$$-\lambda^{0T} u^0 + \lambda^{0T} w \geq 0$$

Ука-е глн. баганаа с
устрон болнаат

$$\begin{aligned} -\lambda^{0T} (u^0 + w) &= -\lambda^{0T} (A f^0 + A f_w) = \\ &= -\lambda^{0T} A (f^0 + f_w) = \sigma^{0T} (f^0 + f_w) = \end{aligned}$$

$$-\lambda^{0T} A = \sigma^{0T}$$

$$= \sigma^{0T} f^0 - \sigma^{0T} f_w \stackrel{4}{\geq}$$

$$\sigma^{0T} \bar{f} - \sigma^{0T} \bar{f} = 0$$

Билет 4 Формулировка задачи выбора состава включенного генерирующего оборудования. Нарушение условий индивидуальной рациональности в задаче с бинарными переменными, моделирующими состояние оборудование.

Выбор состава генерирующего оборудования оказывает определяющее влияние на ценообразование в конкурентном рынке электроэнергии. Это продиктовано особенностями производства электроэнергии на современных электростанциях и вытекающими из этих особенностей процедурами планирования. Длительность цикла краткосрочного планирования составляет сутки. На предстоящие сутки оператор зоны централизованного управления (каковой является ЕЭС РФ), исходя из прогнозируемых условий почасового потребления, должен запланировать мощность электростанций, которые будут нести нагрузку для покрытия прогнозируемого потребления, а также будут находиться в резерве.

В процессе планирования оператор определяет, какие блоки станций будут включены, а какие выключены, т.е. определяет состав работающего оборудования. Пуски/остановы большинства блоков внутри суток явление скорее исключительное, поскольку по технологии требуется, как правило, несколько часов для подготовки блока к работе в нормальном диапазоне регулирования. Помимо этого блок при пуске несет дополнительные затраты топлива на технологические нужды, что сопоставимо с несколькими часами работы в нормальном режиме. После того, как выбор состава определен, в ценообразовании на рынке участвуют только пущенные блоки и станции. Все это говорит о том, что цена неоптимального выбора состава может оказаться дорогой для рынка.

Особенностью задачи с формальной точки зрения является ее дискретная природа и наличие сложных моделей, отражающих технологию и ценовые характеристики блоков электростанций. Одним из распространенных подходов к решению задачи является техника Лагранжевой релаксации. Все системные ограничения, связывающие разные блоки между собой, снимаются с помощью функции Лагранжа, а оставшиеся ограничения формируют набор независимых блочных подзадач, которые решаются, в том числе, методами динамического программирования. Такой подход зачастую не требовал описания блочных подзадач в форме задачи математического программирования с линейными ограничениями и с целочисленными переменными. Однако в последнее время возрос интерес именно к линейным целочисленным формулировкам данной задачи.

Введение

Рассматривается задача выбора состава включенного генерирующего оборудования (задача ВСВГО) при управлении энергосистемой в условиях конкурентного рынка электроэнергии Российской Федерации. Управление работой энергосистемы осуществляется диспетчерской службой в режиме реального времени, при этом обеспечивается баланс производства и потребления мощности в энергосистеме с учетом неопределенности изменения графика потребления. Управление режимами работы электростанций требует тщательного планирования, поскольку включение холодного энергоблока тепловой электростанции может занимать значительное время, а для уже включенных энергоблоков имеются ограничения по скорости набора и сброса нагрузки. В Российской Федерации функционирует конкурентный рынок электроэнергии и мощности. В условиях рынка планирование режимов работы энергосистемы осуществляется не только с учетом технологических ограничений электростанций, но и с учетом ценовых заявок поставщиков и потребителей электроэнергии.

Процесс краткосрочного планирования в Единой энергосистеме (ЕЭС) можно разделить на три этапа [1]. Обозначим через X операционные сутки, в течение которых происходит производство и поставка электроэнергии. На первом этапе, в сутки $X-2$, при помощи формализованной процедуры ВСВГО Системным оператором единой энергосистемы России осуществляется планирование включения в сеть и отключения от сети генераторов. Далее, в сутки $X-1$, проводится аукцион ценовых заявок поставщиков и потребителей электроэнергии (рынок на сутки вперед, РСВ) и определяются плановые графики работы генерирующего оборудования на сутки X . Плановый график работы генерирующего оборудования при уточненных прогнозных данных корректируется в балансирующем рынке (БР) в сутки X каждые два часа (планируется переход к расчетам каждый час).

При планировании графиков работы генерирующего оборудования в рынке на сутки вперед и в балансирующем рынке состав оборудования заранее известен участникам, что позволяет

сформулировать технологические ограничения тепловых электростанций в виде простых ограничений минимально и максимально возможной нагрузки генерирующего оборудования, а также ограничений скорости набора и сброса нагрузки. В процедуре выбора состава оборудования, напротив, состав оборудования заранее не известен, поэтому при построении математической модели данной процедуры все технологические ограничения электростанций необходимо заложить в формализованную математическую модель, чтобы полученный состав и плановый график работы генерирующего оборудования был технически реализуем с минимальными отклонениями от запланированного.

До 01.06.2014 г. планирование состава оборудования при помощи процедуры ВСВГО выполнялось в режиме недельного планирования с однократной корректировкой в середине недели. С 01.06.2014 г. действует регламент ежедневных расчетов ВСВГО в скользящем режиме. В этом режиме задача ВСВГО решается ежедневно в сутки $X-2$ на сутки X , $X+1$, $X+2$. При этом запланированный состав оборудования на сутки X носит окончательный характер и закладывается в предварительный диспетчерский график, а состав оборудования на сутки $X+1$ и $X+2$ может быть уточнен при следующих расчетах. Выбранный состав оборудования учитывается в дальнейшем при планировании нагрузки в рынке на сутки вперед и в балансирующем рынке.

Для решения задачи ВСВГО разработан программный комплекс, позволяющий автоматизировать все этапы решения задачи, включая загрузку и обработку исходных данных, проверку исходных данных на полноту и непротиворечивость, подготовку расчетной модели, решение задачи оптимизации, обработку и публикацию результатов расчета. В данной работе дается обзор моделей и алгоритмов, используемых при решении задачи выбора состава включенного генерирующего оборудования, приводится описание и архитектура программного комплекса для решения задачи ВСВГО и рассматривается задача классификации причин пусков и остановов генерирующего оборудования, которая решается после задачи ВСВГО.

1. Постановка задачи выбора состава оборудования

Рассмотрим задачу ВСВГО с интервалами планирования $t = \overline{1, T}$. Обозначим через $s_{it}^u, s_{it}^d \in \{0, 1\}$ индикаторы работы, пуска и останова соответственно для генератора $i \in B$ в момент времени t , где через B обозначено множество генераторов в энергосистеме. Через $p_{it}^g \geq 0$ обозначим производство мощности генератором i в момент времени t . В общем виде задача выбора состава оборудования может быть сформулирована как задача минимизации стоимости работы, пусков и остановов генерирующего оборудования

$$(1) \quad \sum_{t=1}^T \sum_{i \in B} \{s_{it}^u \cdot \hat{C}_{it}^u + s_{it}^d \cdot \hat{C}_{it}^d + GenCost(s_{it}, p_{it}^g)\} \rightarrow \min_{s, s^u, s^d, p^g}$$

при наличии общесистемных ограничений баланса генерации и потребления с учетом потерь в сети

$$(2) \quad \sum_{i \in B} p_{it}^g = \hat{P}_t^c + Loss_t(p_t^g), \quad t = \overline{1, T}, \quad p_t^g = (p_{t1}^g, p_{t2}^g, \dots, p_{tn}^g, \dots), \quad i \in B,$$

и ограничений на максимальные потоки мощности по линиям электропередачи

$$(3) \quad Flow_{ik}(p_t^g) \leq \hat{F}_{ik}^{\max}, \quad t = \overline{1, T}, \quad k = \overline{1, N_t^{sec}},$$

где N_t^{sec} – общее число контролируемых сечений (групп линий электропередачи и трансформаторов, по которым задаются ограничения максимального потока мощности). Кроме общесистемных ограничений (2)-(3) также важно учитывать режимные и технологические ограничения электростанций (4)-(7). Полная постановка задачи ВСВГО с учетом всех технологических ограничений отдельных электростанций и общесистемных ограничений приводится в [2]. Выпишем соотношения, связывающие индикаторы пуска и останова с переменными состояния

$$(4) \quad s_{it}^u = \min(0, s_{it} - s_{t-1,i}), \quad s_{it}^d = \min(0, s_{t-1,i} - s_{t,i}), \quad t = \overline{1, T}, \quad i \in B,$$

и ограничения, задающие диапазон работы включенных генераторов

$$(5) \quad s_{ti} \cdot \hat{P}_{ti}^{\min} \leq p_{ti}^g \leq s_{ti} \cdot \hat{P}_{ti}^{\max}, t = \overline{1, T}, i \in B.$$

Участниками и Системным оператором могут задаваться ограничения режимов работы групп генерирующего оборудования $V_k \subseteq B, k = \overline{1, N^g}$, принадлежащих одной электростанции, например, ограничения на минимальное число генераторов во включенном состоянии

$$(6) \quad \sum_{i \in V_k} s_{ti} \geq \hat{M}_{tk}^{on} - w_{tk}^{on}, t = \overline{1, T}, i \in B,$$

или ограничения на минимальное и максимальное производство мощности

$$(7) \quad \hat{P}_{tk}^{g \min} \leq \sum_{i \in V_k} p_{ti}^g \leq \hat{P}_{tk}^{g \max}.$$

Данные ограничения могут быть вызваны, например, теплофикационными режимами работы, соображениями устойчивой работы электростанции или условиями обеспечения заданного уровня напряжения в узлах электрической сети. Кроме ограничений (6)-(7) совместных режимов работы для генераторов одной электростанции могут задаваться более сложные режимы работы составного генерирующего оборудования, такого как парогазовые установки или двухкорпусные блоки. Более подробная модель таких ограничений приведена в [2].

В условиях конкурентного рынка поставщики электроэнергии для участия в процедуре ВСВГО помимо собственных технологических ограничений подают ценовые заявки, в которых указываются пары объем-цена в отношении групп генерирующего оборудования, а также стоимость пуска отдельных генераторов. По правилам рынка участник предоставляет объем, указанный в заявке по цене не выше заявленной. Следует отметить, что цены в заявках, подаваемых участниками для ВСВГО, являются ограничением сверху для цен заявок генерирующего оборудования участника в рынке на сутки вперед, таким образом ограничиваются возможности поставщиков по манипулированию ценами на рынке.

В качестве критерия стоимости работы включенного генерирующего оборудования в задаче ВСВГО в настоящее время используется стоимость включенной мощности (стоимость электроэнергии плюс стоимость резерва, размещенного на включенных в сеть генераторах).

$$(8) \quad GenCost(s_{ti}, p_{ti}^g) = \hat{C}_{ti} \cdot \hat{P}_{ti}^{\max} \cdot s_{ti}, t = \overline{1, T}, i \in B.$$

Использование данного критерия позволяет минимизировать величину включенного резерва мощности в пределах задаваемого Системным оператором норматива, однако может привести к повышению цены на электроэнергию в рынке на сутки вперед или в балансирующем рынке вследствие первоочередного размещения нагрузки и резерва на генераторах, работающих в режиме вынужденных состояний. В качестве альтернативного критерия, применявшегося Системным оператором до 2011 г. и рассмотренного в работе [1], исследовался критерий минимизации стоимости производства электроэнергии

$$(9) \quad GenCost(s_{ti}, p_{ti}^g) = \hat{C}_{ti} \cdot p_{ti}^g \cdot s_{ti}, t = \overline{1, T}, i \in B.$$

На рис. 1 приведено сравнение индикативной цены [3], сформированной в модели балансирующего рынка на составе оборудования, отобранного в соответствии с критериями оптимальности (8) и (9). Для сравнения также приведена реальная цена, сформировавшаяся в балансирующем рынке за данные сутки. Следует отметить, что модельные цены построены с использованием заявок генераторов в ВСВГО, тогда как индикатор БР сформирован на заявках, подаваемых участниками позднее в рынок на сутки вперед и в балансирующий рынок.

В табл. 1 сравниваются параметры состава включенного генерирующего оборудования тепловых электростанций, сформированного в результате решения задачи ВСВГО с различными критериями оптимальности. Заметим, что в результате решения задачи с критерием минимизации стоимости производства электроэнергии имеется значительное превышение резерва на включенном генерирующем оборудовании по сравнению с нормативно заданной величиной в 1200 МВт.

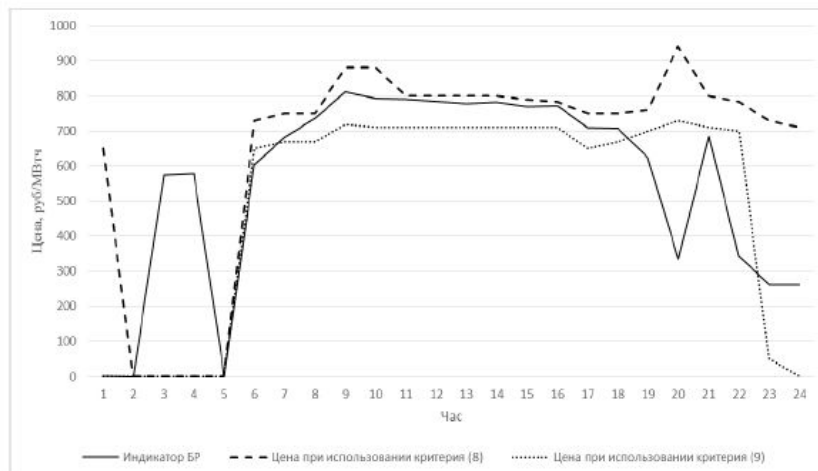


Рис. 1. Сравнение средней цены в рынке электроэнергии для энергосистемы Сибири при применении различных критериев стоимости в задаче ВСВГО.

Таблица 1. Сравнение параметров отобранного генерирующего оборудования для энергосистемы Сибири при применении различных критериев стоимости в задаче ВСВГО

Параметр	Критерий (8)	Критерий (9)
Мощность отобранного оборудования, МВт	13 220	14 204
Резерв мощности при нормативе 1200, МВт	1 209	2 070
Стоимость включенной мощности, руб.	231 427 497	249 843 256
Стоимость производства электроэнергии, руб.	144 240 733	141 416 444
Максимальная цена в рынке, руб./МВтч	941	730

Критерии стоимости (8) и (9) приведены в упрощенном виде для случая одноступенчатых заявок, подаваемых участниками в отношении каждого генератора. По правилам рынка [4] участникам разрешено подавать до трех пар объем-цена в отношении групп генерирующего оборудования, принадлежащих одной электростанции. Система при этом выбирает оптимальный по критерию стоимости состав включенного генерирующего оборудования с выполнением общесистемных и станционных ограничений. Дополнительно к парам объем-цена в заявках генераторов подается стоимость пуска $\hat{C}_{ii}^u$, которая выплачивается по факту исполнения требования пуска генератора, запланированного в результате решения задачи ВСВГО. При этом оплата производится только в том случае, если пуск был запланирован не по инициативе участника, т.е. для выполнения общесистемных ограничений (2)-(3) или для выполнения внутростанционных ограничений (6)-(7), задаваемых Системным оператором. В связи с этим возникает задача классификации инициатив, решаемая программным комплексом ВСВГО (см. раздел 3.3).

При использовании критерия минимизации стоимости включенной мощности (8) может производиться значительное число остановов генерирующего оборудования в часы кратковременного снижения потребления электроэнергии (например, в ночные часы) с последующими пусками в часы роста потребления. Для предотвращения останова генераторов в часы минимальной нагрузки используется модельная стоимость останова $\hat{C}_{ii}^d$, не выплачиваемая участникам, но предотвращающая останов генераторов на незначительные (до $\hat{T}_i$ часов) интервалы времени

$$(10) \quad \hat{C}_{ii}^d = \hat{T}_i \cdot \hat{C}_{ii} \cdot \hat{P}_{ii}^{\max}, t = \overline{1, T}, i \in B.$$

2. Алгоритм решения задачи выбора состава оборудования

Сформулированная задача ВСВГО (1)-(8) является нелинейной частично целочисленной задачей математического программирования большой размерности. Ограничения (2) и (3) носят нелинейный характер, поэтому для постановки задачи в линейной форме выполним линеаризацию данных ограничений в окрестности некоторого установившегося электрического режима, соответствующего производству мощности $\hat{p}_t^g$ [2, 5]. Для того чтобы полученные в результате линеаризации коэффициенты соответствовали допустимому режиму работы энергосистемы, разработан алгоритм выбора значений $\hat{p}_t^g$, реализованный в программном комплексе ВСВГО. В линейном приближении соотношение баланса мощности в энергосистеме с учетом потерь в сетях (2) можно заменить соотношением

$$(2') \quad \sum_{i \in B} (1 - l_{ii}) \cdot p_{ii}^g = \hat{P}_t^c + \tilde{L}_t, \quad t = \overline{1, T}, \quad i \in B,$$

где через $l_{ii} = \partial \text{Loss}_i(p_i^g) / \partial p_{ii}^g$ обозначена производная функции потерь по нагрузке генератора $i \in B$ в момент времени t , а $\tilde{L}_t$ – постоянная величина, полученная при линеаризации. Аналогичным образом выписываются линейные соотношения для потока активной мощности по контролируемым сечениям

$$(3') \quad \sum_{i \in B} f_{iki} \cdot p_{ii}^g \leq \hat{F}_{ik}^{\max} + \tilde{F}_{ik}, \quad t = \overline{1, T}, \quad k = \overline{1, N_t^{\text{sec}}},$$

где через $f_{iki} = \partial \text{Flow}_{ik}(p_i^g) / \partial p_{ii}^g$ обозначена производная потока мощности через контролируемое сечение k по нагрузке генератора $i \in B$ в момент времени t , а $\tilde{F}_{ik}$ – постоянная величина, полученная при линеаризации.

В результате преобразования нелинейной задачи к линейному виду получим задачу частично целочисленного линейного программирования с критерием (1), (8) при ограничениях (2'), (3'), (4)-(7), характеристики которой приведены в табл. 2. Задачи аналогичной размерности возникают при моделировании процедуры выбора состава оборудования в рынке PJM (США) [6]. Процедуры решения таких задач в том или ином виде задействуют метод ветвей и границ, однако современные методы существенно используют при решении эвристические алгоритмы и методы отсечения для поиска допустимых субоптимальных решений [7, 8]. Из-за большого числа бинарных переменных в задаче ВСВГО ее точное решение на практике невозможно. Методы ветвления, используемые при решении данной задачи, позволяют получать на каждом шаге оценку оптимальности решения (MIP gap) через относительную невязку оптимальности, вычисляемую как

$$(11) \quad (\text{BestInteger} - \text{BestLP}) / \text{BestLP},$$

где BestInteger – значение целевой функции в наилучшем найденном целочисленном решении, BestLP – наилучшая оценка целевой функции, полученная путем релаксации ограничений целочисленности в алгоритме ветвления [7].

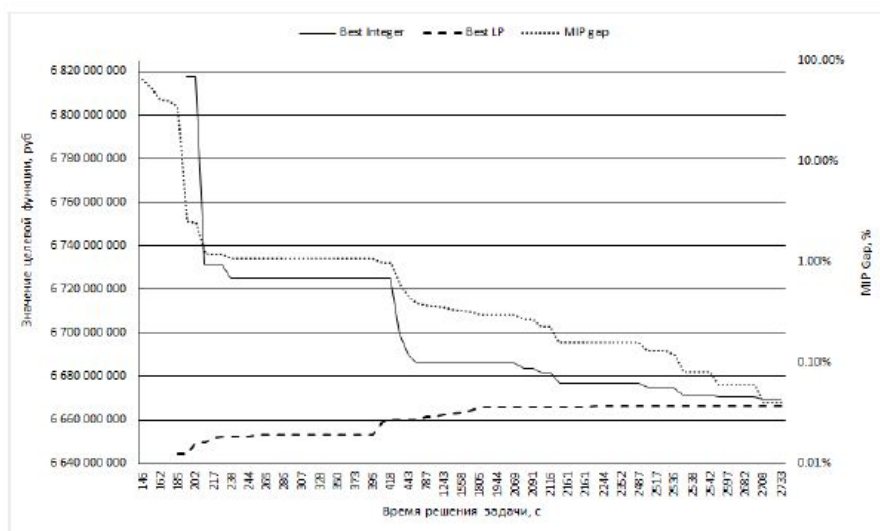
Таблица 2. Количество переменных и ограничений в задаче

Параметр	Значение
Общее число переменных в задаче	766 438
Число целочисленных бинарных переменных	68 085
Общее число ограничений	1 054 792
Число ненулевых элементов в матрице задачи	7 154 644

Проведенные испытания показывают, что решение задачи оптимизации ВСВГО с оценкой оптимальности MIP gap = 0,5% занимает приемлемое время (около 500 сек., см. рис. 2), дальнейшее увеличение точности ведет к существенному увеличению времени расчета. На практике неоптимальное решение задачи может приводить к нерациональным результатам как для индивидуальных участников рынка, так и для рынка в целом. Для выявления подобных результатов и

для классификации инициатив пусков и остановов генераторов разработаны алгоритмы [5], реализованные в программном комплексе ВСВГО.

Для регламентных расчетов ВСВГО приемлемое время решения задачи оптимизации составляет около одного часа, поэтому использование требования к невязке MIP gap в 0,5% позволяет решать задачу ВСВГО с допустимой точностью за время, не превышающее максимальное, даже в условиях сложных режимов работы энергосистемы.



Билет 5. Материальные и финансовые балансы. Описание одного из экономических агентов (производство, домашние хозяйства, государство, коммерческий банк) в однопродуктовой модели.

3. процессы общественного воспроизводства складываются из элементарных процессов в многочисленных производственных единицах. Совокупные результаты элементарных процессов выражаются в агрегированных показателях экономического развития. По возможности макропоказатели и соотношения между ними должны быть выведены из исходных микроописаний элементарных процессов на основе обоснованных методов агрегирования;

4. результаты анализа модели необходимо сравнивать с качественными особенностями эволюции моделируемой системы.

Методология САРЭ предполагает, что описание экономической системы начинается с выделения экономических агентов, деятельность и отношения которых определяют структуру изучаемой экономики и ее эволюцию. Деятельность экономических агентов сводится к производству и потреблению материальных благ, обмену ими и их распределению. Выбор агента оказывает влияние на состояние агента, которое описывается некоторым набором показателей, отражающих результат предыдущей деятельности агента. К таким показателям относятся количества (запасы) материальных активов и финансовых инструментов (финансовых активов и обязательств). При построении модели набор активов и обязательств, описывающих состояние агентов, определяется одновременно с выделением агентов.

Материальные и финансовые активы и обязательства обладают одним важным свойством – они являются **аддитивными величинами**. Вследствие этого процессы перераспределения любых активов и обязательств можно описать специальными уравнениями, называемыми **уравнения балансов**. Уравнения материальных балансов связывают изменения запасов материальных благ у экономических агентов с потоками обменов между ними. Согласование и контроль деятельности экономических агентов обеспечивает финансовая система, которая оперирует стоимостными эквивалентами результатов настоящей и будущей деятельности агентов: доходами, расходами, сбережениями, ссудами и т.д. Практически любому материальному потоку между агентами соответствует поток денежных платежей. Изменения финансовых активов и обязательств с потоками платежей описываются уравнениями финансовых балансов.

4.1 Материальные балансы

Пусть в модели рассматривается множество экономических агентов A . Предположим, что агенты потребляют и используют на производственные нужды множество продуктов $\mathcal{P}$ и множество ресурсов $\mathcal{R}$. Как и ранее (см. п. 1.2), мы считаем, что продукты производятся экономическими агентами, которые при этом затрачивают другие продукты и ресурсы. Ресурсы поступают агентам из внешней среды, которую мы не относим к рассматриваемой экономической системе. Деление всех благ на продукты и ресурсы условно и зависит от постановки задачи (при описании производства металла ресурсами будут руда и электроэнергия, при описании энергетической отрасли электроэнергия будет продуктом).

Для составления материальных балансов важно не то, относится благо к продуктам или ресурсам, а то, может ли оно передаваться от агента другим агентам. Если нет, то описание блага является элементом технологических, внутренних, ограничений агента и для него уравнение баланса составлять не нужно.

Будем рассматривать только те продукты и ресурсы, которыми агенты могут обмениваться. Такие блага будем называть товарами. Для описания передачи товаров будем считать, что в экономической системе в каждый момент времени запасы всех товаров целиком распределены между агентами. Получаем аддитивную характеристику экономической системы – запас $Q_i^a(t)$ товара $i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$, имеющийся в распоряжении каждого агента $a \in A$ в каждый момент времени t . Запас товара может изменяться в результате:

- производства (для продуктов) или поступления из внешней среды (для ресурсов) в количестве $X_i^a(t) \geq 0$ единиц в единицу времени;
- расходования на конечное потребление в количестве $C_i^a(t) \geq 0$ единиц в единицу времени;
- текущих затрат на производство в количестве $V_i^a(t) \geq 0$ единиц в единицу времени;
- капитальных затрат на производство в количестве $J_i^a(t) \geq 0$ единиц в единицу времени;
- в результате передач товара между агентами a и b в количестве $X_i^{ab}(t)$ в единицу времени ($X_i^{ab}(t)$ могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от направления передачи товара: $X_i^{ab}(t) > 0$ если товар передается от агента a агенту b). Товары передаются без потерь, т.е. $X_i^{ab}(t) = -X_i^{ba}(t)$).

Учитывая все перечисленные, получаем, что изменение запаса товара $Q_i^a(t)$ описывается уравнением:

$$\frac{dQ_i^a}{dt} = X_i^a - C_i^a - V_i^a - J_i^a - \sum_{b \in A} X_i^{ab}, \quad a \in A, \quad i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}. \quad (4.1)$$

Очевидно, что соотношению (4.1) удовлетворяют любые вещественные блага (автомобили, стулья, вода, нефть). Ограничением на использование таких товаров является условие неотрицательности их запасов: $Q_i^a(t) \geq 0, a \in A, i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$. Такие товары называются *складируемыми*.

Однако запасов некоторых товаров (электроэнергия, труд) не существует физически (относительно электроэнергии это не совсем верно, так как существуют электрические аккумуляторы, однако запасы электроэнергии в них пренебрежимо малы по сравнению с объемом передачи по сетям). Ограничение на использование таких товаров состоит в том, что в каждый момент времени сумма затрат, потребления и передач таких товаров не должна превосходить их производства и поступлений из внешней среды. С учетом уравнения (4.1) это условие означает, что

$$\frac{dQ_i^a(t)}{dt} \geq 0, \quad a \in A, \quad i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}. \quad (4.2)$$

Такие товары называются *нескладируемыми*.

С помощью уравнений (4.1) и (4.2) также можно описать обмены многими видами услуг, если понимать аддитивность услуг следующим образом. В процессе обслуживания агент, предоставляющий услугу, не может обслуживать другого агента. Поэтому если включать в балансы услуги по их стоимости, они становятся аддитивным активом.

С помощью балансовых соотношений нельзя описать:

- общественные блага (в силу их неделимости) – общественную безопасность, затраты на сохранение окружающей среды;
- знания и информацию в силу того, что при передаче от одного агента другому каких-либо знаний, первый агент их не лишается.

Как правило, изменения запасов товаров у всех агентов несущественны (производители держат на складе то, что собираются реализовать в ближайшее время; потребители хранят только товары повседневного пользования; увеличение запасов часто является предвестником экономического кризиса, т.е. некоторых структурных изменений, – производители не могут реализовать произведенную продукцию, потребители запасаются продуктами питания и другими товарами), т.е. можно считать, что $\frac{dQ_i^a(t)}{dt} = 0$ в левой части (4.1). Если рас-

сматривать чистые выпуски продуктов $Y_i^a = X_i^a - V_i^a$, то балансовые уравнения (4.1) примут вид

$$Y_i^a = C_i^a + J_i^a + \sum_{b \in A} X_i^{ab} \quad a \in A, \quad i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}. \quad (4.3)$$

Понятно, что все реальные потоки благ нельзя ни учесть, ни отследить, ни зарегистрировать, поэтому возникает проблема *агрегирования* активов. Она состоит в том, чтобы свести наборы реальных активов в агрегаты, у которых сохранялось бы свойство аддитивности и за изменениями которых можно было бы наблюдать.

В экономике большинству передач товаров между агентами $X_i^{ab}(t)$ соответствует встречный поток денежных платежей $\Phi_i^{ba}(t)$, причем $\Phi_i^{ba}(t) = -\Phi_i^{ab}(t)$, $a, b \in A, i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$.

Потокам выпуска $X_i^a(t)$, текущих $V_i^a(t)$ и капитальных $J_i^a(t)$ затрат также соответствуют денежные потоки $\tilde{X}_i^a(t)$, $\tilde{V}_i^a(t)$, $\tilde{J}_i^a(t)$. Так как все финансовые данные регистрируются бухгалтерским учетом, то за ними легко наблюдать, собирая и анализируя соответствующую отчетность. Денежные потоки $\tilde{C}_i^a(t)$, соответствующие потокам потребления, оцениваются по доходам и расходам потребителей, остальные финансовые показатели отражаются в бухгалтерских балансах предприятий, организаций и государственном бюджете. Коэффициент пропорциональности между потоком платежей и встречным потоком товара представляет собой цену товара. При этом вся экономическая статистика базируется на предположении о том, что в каждый момент времени в экономике существуют единые для всех агентов цены:

$$\Phi_i^{ab} = p_i X_i^{ba}, \quad \tilde{C}_i^a = p_i C_i^a, \quad \tilde{J}_i^a = p_i J_i^a, \quad \tilde{X}_i^a = p_i X_i^a, \quad \tilde{V}_i^a = p_i V_i^a.$$

Систематическая разница цен (например, оптовых и розничных) объясняется наличием посредников, увеличивающих стоимость товара за счет дополнительно предоставляемых услуг, которые также входят в список рассматриваемых товаров.

В предположении о существовании в экономике единых цен в соответствии с материальным балансом (4.3) должен выполняться соответствующий баланс платежей:

$$\tilde{Y}_p^a = \tilde{C}_p^a + \tilde{J}_p^a + \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{b \in A} \Phi_i^{ba}, \quad \tilde{Y}_p^a = \tilde{X}_p^a - \tilde{V}_p^a. \quad (4.4)$$

Здесь выполнено суммирование финансовых балансов агента по всем продуктам. Величины, входящие в баланс, имеют вполне определенный экономический смысл: $\tilde{Y}_p^a = \sum_{i \in \mathcal{P}} \tilde{Y}_i^a$ – *добавленная стоимость*, $\tilde{J}_p^a = \sum_{i \in \mathcal{P}} \tilde{J}_i^a$

– **валовые инвестиции**, $\tilde{X}_p^a = \sum_{i \in P} \tilde{X}_i^a$ – **объем производства**, $\tilde{V}_p^a = \sum_{i \in P} \tilde{V}_i^a$ – **материальные затраты**. Эта интерпретация позволяет сопоставлять показатели состояния модельного агента с наблюдаемыми показателями хозяйственной деятельности реальных субъектов экономики.

Просуммировав балансы (4.4) по всем агентам из некоторого множества (например, находящимся в одной стране) $N \subseteq A$ и учтя тот факт, что взаимные платежи между агентами внутри этого множества уничтожаются, получим баланс

$$\tilde{Y}_p^N + \tilde{I}_p^N = \tilde{C}_p^N + \tilde{J}_p^N + \tilde{E}_p^N, \quad (4.5)$$

где $\tilde{Y}_p^N = \sum_{a \in N} \tilde{Y}_p^a$ – **валовой внутренний продукт**, $\tilde{J}_p^N = \sum_{a \in N} \tilde{J}_p^a$ – **фонд накопления**, $\tilde{X}_p^N = \sum_{a \in N} \tilde{X}_p^a$ – **объем производства**, $\tilde{C}_p^N = \sum_{a \in N} \tilde{C}_p^a$ – **фонд потребления**, $\tilde{E}_p^N = \sum_{a \in N} \sum_{b \notin N} [\Phi_p^{ba}]_+$ – **экспорт**, т.е. сумма платежей от агентов вне множества N , $\tilde{I}_p^N = \sum_{a \in N} \sum_{b \notin N} [\Phi_p^{ab}]_+$ – **импорт**, т.е. сумма платежей агентов группы N агентам, не входящим в эту группу. Баланс (4.5) носит название **основного макроэкономического тождества**, его составляющие также регистрируются экономической статистикой.

Везде далее в этой главе мы уделяем значительное внимание терминологии для того, чтобы обеспечить возможность сопоставления модельных балансов с реальной бухгалтерской отчетностью предприятий, на основе которой определяются и макроэкономические данные.

Поскольку все экономические показатели являются стоимостными, то для оценки их динамики необходимо иметь возможность сравнивать показатели, рассчитанные для разных лет. Непосредственно такое сравнение можно производить, только если стоимость денежной единицы не меняется. Изменение стоимости денежной единицы выражается в том, что на одну и ту же сумму в разные моменты времени можно приобрести разное количество товаров. Другими словами, это означает изменение уровня цен.

Увеличение уровня цен называется **инфляцией**, уменьшение – **дефляцией**.

Для измерения уровня цен используется понятие **индекса цен** – отношения стоимости определенного набора товаров и услуг для заданного периода к стоимости такого же набора в некотором начальном периоде, который называется **базовым**.

Пусть требуется определить индекс цен некоторой группы товаров $I \subseteq P \cup R$. Если группа является достаточно большой (например, более тысячи наименований), то в реальности уследить за изменением цен всех товаров группы довольно сложно. Поэтому выбирают представительную подгруппу $K \subseteq I$, по которой рассчитывают индекс всей группы I . Такая подгруппа называется **корзиной**. Индекс цен в некоторый момент t относительно базового периода t_0 для группы I определяется следующим образом:

$$P_I = \frac{\sum_{i \in K} p_i(t) \sum_{a \in A} Z_i^a(\theta)}{\sum_{i \in K} p_i(t_0) \sum_{a \in A} Z_i^a(\theta)}.$$

Здесь p_i – цена товара i , а в зависимости от того, что понимают под Z_i^a , и от выбора момента времени θ , получаются разные индексы. При $Z_i^a = C_i^a$ получается **индекс цен потребителей**, при $Z_i^a = X_i^a$ – **индекс цен производителей**, при $Z_i^a = J_i^a$ – **индекс капитальных затрат**. Можно выделять и более мелкие группы товаров, получая, соответственно, индексы цен продуктов питания или индекс оптовых цен.

Выбор момента времени θ определяет то, какой набор товаров берется за основу подсчета индекса. Если $\theta = t$, т.е. выбраны объемы товаров в текущем периоде, то получается **индекс Пааше** $p_{\text{Пааше}}$. Если $\theta = t_0$, т.е. выбраны объемы товаров в базовом периоде, получается **индекс Ласпейреса** $p_{\text{Ласп}}$. Для близких временных периодов эти индексы практически не отличаются. Однако для далеких периодов начинает сказываться постоянно происходящее изменение в структуре потребления и производства (если, например, в корзину входит товар «телевизор», то по сравнению с периодом тридцатилетней давности изменилась не только цена товара, но и существенно изменились объемы потребления). Для компенсации этого эффекта используют **индекс Фишера** $p_{\text{Фиш}} = \sqrt{p_{\text{Пааше}} \cdot p_{\text{Ласп}}}$.

Если возможно было бы измерить индекс цен по всем продуктам и ресурсам, обращающимся в экономике, то получился бы индекс цен ВВП, называемый **дефлятором ВВП**. На практике расчет дефлятора осуществляется экспертным взвешиванием индексов потребительских цен, индекса цен производителей и индекса капитальных затрат с последующей проверкой по производству и потреблению отдельных видов однородных продуктов.

Сравнения экономических показателей в разные моменты времени можно проводить, скорректировав их с учетом изменения цен, т.е. с учетом значения индексов цен. Показатели, рассчитанные в текущих ценах (в це-

нах на момент подсчета), называются **номинальными**. Показатели, учитывающие рост или снижение цен, называются **реальными**. В частности,

$$\text{реальный ВВП} = \frac{\text{номинальный ВВП}}{\text{дефлятор ВВП}}.$$

4.2 Схема межотраслевого баланса

Заметим, что все рассмотренные в главах 1-3 модели укладываются в предложенное описание, только к ним еще необходимо добавить соответствующие принципы оптимальности. Покажем, как в подобной схеме записывается модель Леонтьева.

Поскольку межотраслевой баланс представляется в разрезе чистых отраслей, то множество всех продуктов $\mathcal{P}$ разбивается на непересекающиеся группы I_k , $k=1, \dots, n$, $\sum_{k=1}^n I_k = \mathcal{P}$, так, что ни один агент не производит продукты двух различных групп. Соответственно и агенты распределяются по группам так, что в группу J_k , $k=1, \dots, n$, попадают агенты, производящие продукты группы I_k . Группы J_k образуют чистые отрасли.

По определению чистой отрасли

$$X_i^{J_k} = X_i^A \quad \text{при} \quad i \in I_k \quad \text{и} \quad X_i^{J_k} = 0 \quad \text{при} \quad i \notin I_k, \quad i \in \mathcal{P}, \quad k=1, \dots, n. \quad (4.6)$$

Как и в модели Леонтьева, будем считать, что отрасли не имеют конечного потребления и не делают капитальных затрат. Кроме того, пренебрежем приростом запасов продуктов. Тогда

$$\frac{dQ_i^{J_k}}{dt} = 0, \quad C_i^{J_k} = 0, \quad J_i^{J_k} = 0, \quad i \in P, \quad k=1, \dots, n. \quad (4.7)$$

Агентов, не производящих продукты, объединим в отдельную группу J_0 . Относительно агентов этой группы будем считать, что они являются чистыми потребителями и также не накапливают запасов. Тогда

$$\frac{dQ_i^{J_0}}{dt} = 0, \quad X_i^{J_0} = 0, \quad V_i^{J_0} = 0, \quad C_i^{J_0} = C_i^A, \quad J_i^{J_0} = J_i^A, \quad i \in \mathcal{P}. \quad (4.8)$$

Группы агентов J_k , $k=0, \dots, n$ образуют разбиение всего множества агентов: $\bigcup_{k=0}^n J_k = A$. В силу соотношений (4.6)-(4.8) балансы (4.3) приобретают вид:

$$X_i^A = V_i^{J_k} + \sum_{m=0}^n (X_i^{J_k J_m} - X_i^{J_m J_k}), \quad i \in I_k, \quad k=1, \dots, n, \quad (4.9)$$

$$0 = V_i^{J_k} + \sum_{m=0}^n (X_i^{J_k J_m} - X_i^{J_m J_k}), \quad i \notin I_k, \quad k=1, \dots, n. \quad (4.10)$$

$$0 = C_i^A + J_i^A + \sum_{m=0}^n (X_i^{J_0 J_m} - X_i^{J_m J_0}), \quad i \in \mathcal{P}. \quad (4.11)$$

Сложив просуммированный по i баланс (4.10) с балансом (4.11) и выразив потоки обменов продуктами, для $i \in I_k$ получим:

$$\begin{aligned} C_i^A + J_i^A + \sum_{j=1, j \neq k}^n V_i^{J_j} &= - \sum_{m=0}^n (X_i^{J_0 J_m} - X_i^{J_m J_0}) - \sum_{j=1, j \neq k}^n \sum_{m=0}^n (X_i^{J_j J_m} - X_i^{J_m J_j}) = \\ &= - \sum_{m=0}^n (X_i^{J_0 J_m} - X_i^{J_m J_0}) - \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^n (X_i^{J_j J_m} - X_i^{J_m J_j}) + \sum_{m=0}^n (X_i^{J_k J_m} - X_i^{J_m J_k}) = \\ &= - \sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^n (X_i^{J_j J_m} - X_i^{J_m J_j}) + \sum_{m=0}^n (X_i^{J_k J_m} - X_i^{J_m J_k}) = \sum_{m=0}^n (X_i^{J_k J_m} - X_i^{J_m J_k}). \end{aligned}$$

С учетом (4.9) получаем баланс

$$X_i^A = C_i^A + J_i^A + \sum_{j=1}^n V_i^{J_j}, \quad i \in I_k, \quad k=1, \dots, n, \quad (4.12)$$

который выражает тот факт, что в замкнутой экономике при неизменных запасах весь продукт расходуется на промежуточные затраты, капитальные затраты и конечное потребление. Если теперь сложить балансы (4.12), умноженные на цены продуктов p_i и разделить на дефлятор $\tilde{p}_k$, построенный по ценам группы продуктов I_k , то получится межотраслевой баланс в стоимостном выражении:

$$X_k = Z_k + \sum_{m=1}^n X_k^m.$$

Здесь X_k – валовой выпуск продукта отрасли k , Z_k – конечное потребление, включающее капитальные затраты, продукта отрасли k , X_k^m – межотраслевые поставки продукта k отрасли m .

Коэффициенты прямых затрат определяются отношением $a_k^m = \frac{X_k^m}{X_m}$, с учетом которых окончательно получаем равенство

$$X_k - \sum_{m=1}^n a_k^m X_m = Z_k, \quad k=1, \dots, n.$$

Оно является записанной построчно моделью Леонтьева (1.25), рассмотренной в п. 1.2.3.1.

4.3 Финансовые балансы

Кредитно-финансовая система обеспечивает контроль и согласование деятельности экономических агентов, оперируя стоимостными эквивалентами результатов настоящей и будущей их деятельности. Поэтому для каждого экономического агента необходимо составить также финансовые балансы.

Как мы видели, основные экономические показатели формируются с помощью денежных оценок материальных активов. Таким образом, деньги являются главным средством передачи информации в экономике. С другой стороны, при описании, например, деятельности коммерческого банка денежные показатели вообще являются основными, поэтому нужно понять, как их следует описывать. Естественно, что деньги являются аддитивной величиной, поэтому мы можем говорить о том, что каждый агент $a \in A$ в момент времени t имеет запас денег $N^a(t)$. Изменение этого запаса обусловлено несколькими группами денежных потоков:

- запас денег меняют платежи за продукты $\sum_{i \in P} \sum_{b \in A} (\Phi_i^{ab} - \Phi_i^{ba})$ и ресурсы $\sum_{i \in R} \sum_{b \in A} (\Phi_i^{ab} - \Phi_i^{ba})$;
- запас денег меняется вследствие других платежей, не связанных со встречной передачей материальных благ или заимствованием (пенсии, налоги, взятки). Такие платежи будем называть **трансфертами**, и обозначать через T^{ab} всю сумму трансфертов, выплаченных агентом a агенту b . В модели к трансфертам следует относить платежи за все блага и активы, продажи которых явно не рассматриваются (для которых не выписываются соответствующие материальные балансы);
- запас денег изменяют отношения заимствования. Обозначим через L^{ba} сумму денег, которую агент a должен агенту b в момент времени t . С точки зрения агента b величина L^{ba} есть ссуда агенту a . Эта величина растет при получении новых кредитов и уменьшается при возврате долгов. В результате операций с долгами запас денег меняется со скоростью $\sum_{b \in A} (\frac{dL_i^{ba}}{dt} - \frac{dL_i^{ab}}{dt})$;
- заимствования L^{ba} сопровождаются встречными потоками процентных платежей R^{ab} . Хотя процентные платежи являются платой за определенную услугу, тем не менее оказывается проще отделить платежи за материальные блага и услуги от чисто финансовых операций.

Перечисленные операции с деньгами объединяются в виде финансового баланса агента a в потоках (деньги в единицу времени):

$$\begin{aligned} \frac{dN^a}{dt} = & \sum_{b \in A} \sum_{i \in P} (\Phi_i^{ba} - \Phi_i^{ab}) + \sum_{b \in A} \sum_{i \in R} (\Phi_i^{ba} - \Phi_i^{ab}) + \sum_{b \in A} (T^{ba} - T^{ab}) + \\ & + \sum_{b \in A} (\frac{dL^{ba}}{dt} - \frac{dL^{ab}}{dt}) + \sum_{b \in A} (R^{ba} - R^{ab}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Если сложить все такие балансы по агентам $a \in A$, то все платежи взаимно уничтожатся, и получится равенство $\frac{d}{dt} \sum_{a \in A} N^a = 0$. Поскольку запасы денег у агентов в реальных экономических системах в целом растут со временем, из этого равенства следует, что должны существовать такие агенты, у которых запас денег отрицательный. Таких агентов называют **эмитентами**, их множество обозначим через $E \subseteq A$, а для описания их деятельности введем показатель суммы денег, выпущенных в обращение, $W^a = -N^a \geq 0$, $a \in E$. Тогда финансовый баланс эмитента имеет вид:

$$0 = \sum_{b \in A} \sum_{i \in P} (\Phi_i^{ba} - \Phi_i^{ab}) + \sum_{b \in A} \sum_{i \in R} (\Phi_i^{ba} - \Phi_i^{ab}) + \sum_{b \in A} (T^{ba} - T^{ab}) + \sum_{b \in A} \left(\frac{dL^{ba}}{dt} - \frac{dL^{ab}}{dt} \right) + \sum_{b \in A} (R^{ba} - R^{ab}) + \frac{dW^a}{dt}. \quad (4.14)$$

Поток $\frac{dW^a}{dt}$ называется *эмиссией* денег. Для всех агентов, кроме эмитентов, $N^a \geq 0$, $a \notin E$.

Соотношение (4.14) показывает, что величину эмиссии можно рассматривать как обязательства эмитента, наравне с кредитами. Разница лишь в том, что по таким обязательствам эмитент не платит проценты и ему не известно, кому он должен. Ясно, что все агенты не могут быть эмитентами. Есть и еще одно отличие от кредита. Как правило, займы осуществляются на какой-либо оговоренный срок, ранее которого не осуществляется возврат средств. Возврат обязательств W^a (изъятие денег из обращения) происходит, если какой-либо агент платит за что-либо эмитенту. Но деньги как платежное средство должны давать возможность их владельцу оплатить ими что угодно и когда угодно. Это свойство денег называется *ликвидностью*. Поэтому никакого срока возврата обязательств не может существовать.

Итак, в экономике деньгами служат бессрочные и беспроцентные обязательства выделенных агентов-эмитентов.

Однако может возникнуть вопрос о том, почему не может быть платежей обязательствами с процентами. Предположим, что все расчеты производятся в кредит, т.е. $N^a = 0 \quad \forall a \in A$. Тогда

$$\sum_{b \in A} \frac{dL^{ba}}{dt} = \sum_{b \in A} \sum_{i \in P} (\Phi_i^{ba} - \Phi_i^{ab}) - \sum_{b \in A} \sum_{i \in R} (\Phi_i^{ba} - \Phi_i^{ab}) - \sum_{b \in A} (T^{ba} - T^{ab}) + \sum_{b \in A} \frac{dL^{ab}}{dt} - \sum_{b \in A} (R^{ba} - R^{ab}).$$

Такая форма расчетов существует и называется *кредитной линией* для юридических лиц и *кредитной карточкой* для физических лиц (разрешение расходовать средства в счет будущих доходов). В обоих случаях кредитор оплачивает счета должника (клиента), записывая платежи в сумму долга и добавляя к ней процент. Погашения клиент может делать, когда ему удобно, лишь бы сумма долга не превысила оговоренного (обычно довольно большого) лимита.

Однако полностью перевести расчеты на такую систему нельзя. Можно показать [8], что использование в качестве денег только обязательств эмитента с положительной номинальной доходностью автоматически увеличивает темп инфляции на величину этой доходности. Это утверждение можно трактовать и как то, что обычные деньги имеют отрицательную доходность, равную величине инфляции, взятой с обратным знаком.

В принципе эмиссия может быть доверена разным агентам:

- чаще всего эмитентом является государство в лице национального банка (Центрального банка в РФ);
- в прошлом эмитентами выступали частные банки. В то время в обращении находились банкноты – беспроцентные бессрочные обязательства различных банков. Эта система превратилась в Федеральную резервную систему (ФРС) США, объединяющую группу специализированных банков. После образования ФРС, начали выпускаться единые денежные знаки;
- в средние века в качестве средства платежа использовалась золото и переводные векселя, выданные торговцами. Большая часть таких векселей никогда не оплачивалась золотом, а взаимно погашалась;
- производители товаров обычно не бывали эмитентами, однако в СССР существовали расчетные счета производителей, которые они могли перерасходовать, в результате чего образовывались взаимные недоплаты производителей и поставщиков комплектующих и ресурсов. Затем они превратились в так называемые неплатежи, представляющие денежные суррогаты, которые в течение некоторого времени использовались в качестве платежных средств с ограниченным кругом обращения;
- в некоторых ситуациях можно считать эмитентами и домашние хозяйства, которые эмитируют деньги посредством кредитных пластиковых карточек с низким процентом.

Заметим, что этот перечень возможных эмитентов практически исчерпывает все множество экономических агентов, которые можно выделить в рыночной экономике.

4.3.1 ФИНАНСОВЫЕ БАЛАНСЫ В ОСТАТКАХ

Финансовый баланс (4.13) отражает изменение финансовых активов и обязательств агента в каждый момент времени. Наличие огромного количества потоков платежей в реальных экономических системах не позволяет использовать для оценки возможностей агента балансы в потоках. Кроме того, финансовая отчетность, которая отражает состояние экономического субъекта, составляется исходя из количеств (запасов) финансовых активов и обязательств, или, как говорят, в *остатках*. Финансовый баланс в остатках можно получить интегрированием по времени баланса в потоках от момента образования агента до интересующего момента времени.

меня при этом общую схему модели. Примеры того, как могут быть решены задачи последних двух пунктов, мы рассмотрели ранее в главах 1 и 2.

4.4.1 Однопродуктовая модель

Однопродуктовая модель – это предельно агрегированная модель экономики. Она должна объяснять, как изменяются со временем составляющие основного макроэкономического баланса в результате взаимодействия агентов, рассматривая движение только одного обобщенного продукта – (реального) валового внутреннего продукта.

Если в рассматриваемой экономической системе существенная часть продукта продается за границу, то это означает, что часть важных агентов – покупатели экспортных и продавцы импортных продуктов – оказываются вне рассматриваемой системы. Поэтому мы будем говорить о замкнутой экономике, т.е. будем считать, что $E = I = 0$. Внутри экономики мы будем различать личное (индивидуальное) потребление и государственное (общественное). Таким образом, однопродуктовая модель будет описываться на языке потоков валового внутреннего продукта, валового накопления инвестиций, совокупного личного и государственного потребления, удовлетворяющих балансовому уравнению $Y = C + G + J$.

Будем считать, что для производства продукта необходимы затраты ресурсов, основным из которых является труд. Обозначим совокупный поток затрат труда через L .

Такая модель соответствует системе европейского капитализма XIX века. Ориентируясь на нее, мы не будем рассматривать акционерный капитал, потребительский кредит и обращение ценных бумаг. Однако при описании денежной системы мы будем ориентироваться на системы XX века, поскольку более ранние основывались на не очень подходящем нам золотом стандарте.

Экономические отношения будем описывать взаимодействием агентов разных типов, каждый из которых использует или производит свою часть продукта Y и свою часть трудовых затрат L . Все множество агентов разделим на непересекающиеся подмножества, каждое из которых объединяет агентов одного типа:

$$A = P \cup T \cup H \cup B \cup \{g\} \cup \{c\},$$

где P – множество производителей, T – множество торговцев, H – множество домашних хозяйств, B – множество банков, g – государство, c – Центральный банк.

Теперь рассмотрим отдельных агентов и их балансы.

4.4.2 Производитель

Агент-производитель $a \in P$ затрачивает часть ресурса L^a и за счет этого производит свою часть ВВП Y^a . Весь произведенный продукт производитель продает торговцам, получая чистый доход Φ_Y^{Ta} , а за использованный труд он платит домашним хозяйствам заработную плату Φ_L^{aH} . Возможности выпуска производителя зависят от технологических ограничений, описание которых мы приводить не будем. Но будем учитывать, что производитель может расширять свои производственные возможности за счет капитальных затрат. Для них он должен купить продукт J^a у торговцев, заплатив за него величину валовых инвестиций Φ_J^{aT} . Перечисленные величины связаны через индекс ставки заработной платы s и цену единственного рассматриваемого продукта $\tilde{p}$:

$$\Phi_L^{aH} = sL^a, \quad \Phi_Y^{Ta} = \tilde{p}Y^a, \quad \Phi_J^{aT} = \tilde{p}J^a.$$

Производителя мы считаем юридическим лицом, владельцем которого являются домашние хозяйства. Все трансферты производителя сводятся к выплате дивидендов владельцам и налогов государству. Производитель может заимствовать средства у банков. Величина $\frac{dL^{Ba}}{dt}$ определяет нетто-кредиты производителю, т.е. разность потоков новых и погашаемых кредитов. За предоставленные ссуды L^{Ba} производитель платит проценты R^{aB} . Помимо займов юридические лица, как правило, держат в банках расчетные счета, представляющие беспроцентную, бессрочную ссуду производителя банкам. Получаем для производителя следующий финансовый баланс:

$$\frac{dN^a}{dt} = \Phi_Y^{Ta} - \Phi_J^{aT} - \Phi_L^{aH} - T^{aH} - T^{ag} + \frac{dL^{Ba}}{dt} - \frac{dL^{aB}}{dt} - R^{aB},$$

где $\frac{dN^a}{dt}$ – прирост кассовых остатков, Φ_Y^{Ta} – величина чистого дохода, Φ_J^{aT} – валовые инвестиции, Φ_L^{aH} – фонд заработной платы, T^{aH} – дивиденды, T^{ag} – налоги, $\frac{dL^{Ba}}{dt}$ – прирост ссуд банков, $\frac{dL^{aB}}{dt}$ – прирост остатков расчетных счетов, R^{aB} – процентные платежи по ссудам.

Все производители в совокупности производят весь продукт и расходуют весь ресурс:

$$Y^P = Y, \quad L^P = L.$$

4.4.3 ТОРГОВЕЦ

Рассмотрим агента-торговца $a \in T$. Он покупает у производителя продукт V^a и платит за него деньги, при этом скупается весь произведенный продукт и выплачивается вся выручка производителей:

$$\Phi_Y^{aP} = \tilde{p}V^a,$$

$$V^T = \sum_{a \in T} V^a = \sum_{a \in P} Y^a = Y^P = Y, \quad \sum_{a \in T} \Phi_Y^{aP} = \Phi_Y^{TP} = \sum_{a \in P} \Phi_Y^{Ta}.$$

Продукт продается домашним хозяйствам и государству для потребления, а также производителям для капитальных затрат:

$$V^T = C + G + J.$$

За проданный продукт торговец получает от домашних хозяйств, государства и производителей платежи Φ_C^{Ha} , Φ_G^{ga} и Φ_J^{Pa} соответственно.

Так как мы предположили, что вся добавленная стоимость создается производителями, то торговцы являются чистыми посредниками – цена продажи совпадает с ценой производителя. Но не создавая добавленной стоимости, посредники не платят налоги, не расходуют ресурсы, не могут брать кредиты. Они только имеют запас наличных и безналичных средств:

$$\frac{dN^a}{dt} = \Phi_J^{Pa} + \Phi_G^{ga} + \Phi_C^{Ha} - \Phi_Y^{aP} - \frac{dL^{Ba}}{dt}.$$

При сложении таких балансов для всей торговли получится равенство $\frac{dN^T}{dt} + \frac{dL^{BT}}{dt} = 0$.

Чистых посредников нет смысла рассматривать по отдельности, их поведение полностью определяется суммарным балансом. Более содержательное описание торговли получится, только если разделить производство добавленной стоимости между производителями и торговцами.

4.4.4 ДОМАШНЕЕ ХОЗЯЙСТВО

Рассмотрим агента-домашнее хозяйство $a \in H$. Он покупает у торговцев продукт в количестве C^a , за который платит сумму, составляющую потребительские расходы:

$$\Phi_C^{aT} = \tilde{p}C^a, \quad C^H = C.$$

Домашнее хозяйство продает труд производителю, получая заработную плату:

$$\Phi_L^{Pa} = sL^a, \quad L^H = L^P = L.$$

Домашнее хозяйство может быть владельцем банков или предприятий и получать от них дивиденды. Домашнее хозяйство платит налоги государству и получает от него трансферты в виде заработной платы государственных служащих и пособий. Потребительский кредит мы не рассматриваем, но учитываем сбережения домашних хозяйств в банках, за которые оно получает процентные платежи.

В результате финансовый баланс домашнего хозяйства приобретает вид:

$$\frac{dN^a}{dt} = \Phi_L^{Pa} - \Phi_C^{aT} + T^{Ba} + T^{Pa} - T^{ag} + T^{ga} - \frac{dL^{aB}}{dt} + R^{Ba},$$

где $\frac{dN^a}{dt}$ – прирост наличных денег, Φ_L^{Pa} – зарплата на производстве, Φ_C^{aT} – потребительские расходы, T^{Ba} – дивиденды банков, T^{Pa} – дивиденды производителей, T^{ag} – налоги, T^{ga} – пособия и зарплата государственных служащих, $\frac{dL^{aB}}{dt}$ – прирост сбережений, R^{Ba} – процентные платежи по вкладам.

4.4.5 ГОСУДАРСТВО

В рамках рассматриваемой модели государство следует сопоставлять с консолидированным государственным бюджетом, включая внебюджетные фонды (поскольку за счет средств этих фондов осуществляются социальные выплаты). Государство реализует общественное потребление, для чего покупает у торговцев продукт, расходы на оплату которого составляют часть государственных расходов. Оставшаяся часть государственных расходов разделяется на оплату труда государственных служащих и пособия населению. В рамках нашей модели эта заработная плата должна рассматриваться как трансферт, поскольку в модели никак не учитывается то, за что эти деньги платятся (общественные блага, образование, медицинское обслуживание).

Средства для оплаты государственных расходов государство получает за счет налогов, которые платят производители, население и банки. Кроме того, государство получает прибыль Центрального банка.

Если доходов не хватает, то государство должно прибегать к заимствованию. Будем считать, что государство может занимать деньги под процент только у Центрального банка (а не у населения и коммерческих банков). Это означает отсутствие обращения государственных облигаций.

С учетом сказанного финансовый баланс государства (фактически, министерства финансов или казначейства) имеет вид:

$$\frac{dN^a}{dt} = -\Phi_G^{gT} + T^{cg} + T^{Bg} + T^{Pg} + T^{Hg} - T^{gH} + \frac{dL^{cg}}{dt} - R^{gc},$$

где $\frac{dN^a}{dt}$ – прирост кассовых остатков, Φ_G^{gT} – оплата государственных закупок, T^{cg} – прибыль Центрального банка, T^{Bg} – налоги от банков, T^{Pg} – налоги от производителей, T^{Hg} – налоги от населения, T^{gH} – пособия и зарплата государственных служащих, $\frac{dL^{cg}}{dt}$ – прирост внутреннего государственного долга, R^{gc} – процентные платежи.

Разность между доходами и расходами определяет величину профицита или дефицита бюджета.

Для государства имеет смысл рассматривать только баланс в потоках, поскольку для государства может и не выполняться условие обеспеченности кредитов какими-либо активами, а это будет означать возможность наличия отрицательных собственных средств.

4.4.6 КОММЕРЧЕСКИЙ БАНК

Коммерческие банки в экономике выполняют чисто финансовые функции – выдают кредиты производителям и населению, принимают вклады населения, производят расчеты между производителями. Основным источником доходов банков являются процентные платежи. В отличие от других агентов коммерческие банки в совокупности представляют достаточно однородную структуру в смысле того, что они производят одни и те же операции с одними и теми же средствами – деньгами. Конечно, существуют и межбанковские операции, но они не имеют значительного влияния на развитие экономики и обусловлены, в основном, финансовыми потребностями самих банков. Поэтому в макроэкономической модели естественно описывать всю систему коммерческих банков одним агрегированным агентом, осуществляющим финансовые операции. Естественными ограничениями деятельности банка является соблюдение банковского баланса (сумма активов должна быть равна сумме пассивов) и соблюдение резервных требований по средствам клиентов в соответствии с установленной нормой резервирования.

Рассмотрим агента «коммерческий банк» $a \in B$. Мы считаем его юридическим лицом, находящимся в собственности агентов из множества домашних хозяйств и занимающимся исключительно финансовыми операциями. Это означает, что банк не продает и не покупает продуктов или ресурсов.

В финансовый баланс коммерческого банка входят результаты операций кредитования производителей, ведения расчетных счетов производителей и торговцев, заимствования у населения и Центрального банка:

$$\begin{aligned} \frac{dN^a}{dt} = & -T^{aH} - T^{ag} - \frac{dL^{aP}}{dt} + \frac{dL^{Pa}}{dt} + \frac{dL^{Ta}}{dt} + \frac{dL^{Ha}}{dt} - \frac{dL^{aB}}{dt} + \frac{dL^{Ba}}{dt} + \frac{dL^{Ca}}{dt} - \frac{dL^{ac}}{dt} \\ & + R^{Pa} - R^{aH} - (R^{Ba} - R^{aB}) - R^{ac}, \end{aligned}$$

где $\frac{dN^a}{dt}$ – прирост кассовых остатков, T^{aH} – дивиденды, T^{ag} – налоги, $\frac{dL^{aP}}{dt}$ – прирост ссуд производителям, $\frac{dL^{Pa}}{dt}$ – прирост остатков расчетных счетов производителей, $\frac{dL^{Ta}}{dt}$ – прирост остатков расчетных счетов торговцев, $\frac{dL^{Ha}}{dt}$ – прирост сбережений домашних хозяйств, $\frac{dL^{aB}}{dt}$ – прирост ссуд другим банкам, $\frac{dL^{Ba}}{dt}$ – прирост ссуд от других банков, $\frac{dL^{Ca}}{dt}$ – прирост ссуд Центрального банка, $\frac{dL^{ac}}{dt}$ – прирост резервов в Центральном банке, R^{Pa} – процентные платежи от производителей, R^{aH} – процентные платежи населению, $(R^{Ba} - R^{aB})$ – сальдо процентных платежей по межбанковским операциям, R^{ac} – процентные платежи по ссудам Центрального банка.

4.4.7 ЦЕНТРАЛЬНЫЙ БАНК

Баланс Центрального банка (ЦБ) в потоках получается сложением балансов остальных агентов с учетом того, что Центральный банк является эмитентом:

$$N^c = -W^c, \quad W^c = N^P + N^T + N^H + N^g + N^B,$$

где W^c – сумма денег, выпущенных в обращение.

Баланс Центрального банка удобнее записывать в остатках, а не потоках. Поскольку Центральный банк в рассматриваемой модели не имеет активов, подлежащих переоценке, баланс в остатках совпадает с отчетным балансом и имеет вид:

$$L^{cB} + L^{cg} = L^{Bc} + W^c + U^c + O^c, \quad \frac{dO^c}{dt} = R^{Bc} + R^{gc} - T^{cg}.$$

Так как обычно собственные средства ЦБ малы, ими можно пренебречь, поэтому

$$L^{cB} + L^{cg} = L^{Bc} + W^c, \quad T^{cg} = R^{Bc} + R^{gc}. \quad (4.19)$$

Отсюда видно, почему во многих странах законодательно запрещены заимствования государства у ЦБ: подставляя выражение для T^{gc} в баланс государства, получаем, что процентные платежи по государственному долгу взаимно уничтожаются, и правительство получает фактически право эмиссии денег за счет роста L^{gc} .

Опишем, как происходит регулирование деятельности банковской системы Центральным банком, соотнеся его с нашим модельным описанием.

Рассмотрим баланс Центрального банка в остатках, балансы коммерческих банков в потоках и дополнительно выпишем баланс некоторого коммерческого банка $\beta \in B$ в остатках:

$$W^\beta + L^{\beta p} + L^{\beta B} + L^{\beta c} = L^{\beta \beta} + L^{\beta \pi} + L^{T\beta} + L^{H\beta} + L^{c\beta} + U^\beta + O^\beta, \\ \frac{dO^\beta}{dt} = R^{\beta \beta} - R^{\beta H} - (R^{\beta \beta} - R^{\beta B}) - R^{\beta c} - T^{\beta H} - T^{\beta g}.$$

Заметим, что главный доход банку приносят процентные платежи по кредитам производителю.

Изменения банковского баланса в результате кредитования и оплаты через счет клиента легко переносятся на формальный язык финансовых балансов. Когда банк β выдает кредит своему клиенту-производителю π , то расчетный счет клиента $L^{\pi \beta}$ и задолженность клиента банку $L^{\beta \pi}$ увеличиваются на одну и ту же величину, так что баланс не нарушается. Запас денег у банка при этом также не изменяется. Если клиент брал деньги для расчетов с другими клиентами этого банка, то дальнейшие операции происходят путем взаимных расчетов по расчетным счетам. Таким образом, пока расчеты не выходят за рамки клиентов одного банка, он может увеличивать средства клиентов, не меняя при этом запас денег. Эта операция называется **кредитной экспансией** или кредитной эмиссией.

Однако ясно, что как только появляется необходимость расчетов с клиентами других банков, возникает препятствие на пути кредитной экспансии. Если обеспечение платежей между клиентом π банка β и клиентом ρ банка γ происходят при наличии корреспондентских отношений между банками, то банк β перечисляет подлежащую переводу сумму с расчетного счета клиента $L^{\pi \beta}$ на счет $L^{\gamma \beta}$ своего долга банку γ и уведомляет об этом банк γ . Банк γ увеличивает одновременно свой актив в части долга $L^{\gamma \beta}$ банка β и пассив в части расчетного счета клиента $L^{\rho \gamma}$.

В отсутствие корреспондентских отношений расчеты проводятся через резервы, находящиеся в Центральном банке. Необходимость держать резервы накладывает определенные ограничения на величины, входящие в финансовый баланс коммерческих банков. Предположим, что норма резервирования равна $\xi < 1$. Тогда

$$L^{\beta c} \geq \bar{L}^{\beta c}, \quad \bar{L}^{\beta c} = \xi(L^{H\beta} + L^{\beta \pi} + L^{T\beta}) -$$

средства банка в Центральном банке (резервы) не должны быть меньше доли $\xi < 1$ от суммы всех средств всех клиентов банка. Для простоты мы будем считать, что все межбанковские расчеты проводятся через разницу $\tilde{L}^{\beta c} = L^{\beta c} - \bar{L}^{\beta c}$, при этом $L^{\beta \beta} = L^{\beta \pi} = 0$.

Упражнение 12. Выяснить, к чему приводит отсутствие резервирования (норма резервирования равна 0) и полное резервирование (норма резервирования равна 1).

В зависимости от того, как ЦБ размещает собранные резервы, различают несколько систем обращения.

1. Денежное обращение в замкнутой экономике без натуральной эмиссии.

Баланс (4.19) предоставляет Центральному банку единственную возможность вложения резервов в активы, не созданные самой банковской системой – вложение в государственные обязательства: $\bar{L}^{Bc} = L^{cg}$. Тогда $W^c + \tilde{L}^{Bc} = L^{cB}$. Это означает, что все наличные деньги и все деньги, использующиеся для безналичных расчетов (денежная масса $M2$), появляются постольку, поскольку коммерческие банки занимают деньги у ЦБ под учетную ставку. Такая система действует в США.

2. Денежное обращение в открытой экономике.

Мы знаем, что Центральный банк имеет счета в иностранной валюте, однако в силу того, что изначально мы описывали замкнутую экономику, у нас не было никакого источника притока иностранной валюты. Для того чтобы получить необходимое описание, предположим, что Центральный банк имеет запас валюты (и зо-

лота) $Z^c(t)$ и может изменять его за счет покупок и продаж на бирже по текущему курсу $w(t)$. Тогда баланс Центрального банка в потоках имеет вид:

$$0 = \frac{dL^{cB}}{dt} + \frac{dW^c}{dt} - \frac{dL^{Bc}}{dt} - \frac{dL^{gc}}{dt} + R^{Bc} + R^{gc} - T^{cg} - w \frac{dZ^c}{dt}.$$

Поскольку валюта продается на бирже, то отчетный баланс Центрального банка должен содержать в активе оценку валютных резервов по текущему курсу $\tilde{Z}^c(t) = w(t)Z^c(t)$. В этом случае балансовая прибыль содержит прибыль от переоценки валютных резервов $\frac{dw}{dt}Z^c$. С учетом малости собственных средств ЦБ, получаем

$$\tilde{Z}^c + L^{cB} + L^{cg} = \bar{L}^{Bc} + \tilde{L}^{Bc} + W^c, \quad T^{cg} = R^{Bc} + R^{gc} + \frac{dw}{dt} \frac{\tilde{Z}^c}{w}.$$

Отсюда видно, что эмиссия наличных денег может производиться:

- при обналичивании корреспондентских счетов банков или при получении банками кредитов ЦБ,
- при кредитовании государства,
- при покупке валюты на бирже.

Заметим, что если ЦБ не дает кредитов коммерческим банкам, $L^{cB} = 0$, и не кредитует государство сверх суммы обязательных резервов, $L^{cg} = \bar{L}^{Bc}$, то

$$\tilde{Z}^c = \tilde{L}^{Bc} + W^c = \tilde{L}^{Bc} + N^A.$$

Это означает, что все высоколиквидные активы агентов полностью обеспечены запасом иностранной валюты. Такая денежная политика носит название **валютного управления**.

3. Система денежного обращения в России.

Российская денежная система прошла несколько этапов. В СССР Госбанк (будущий ЦБ) был единственным банком. Он регулировал систему денежного обращения, кредитовал производителей, обеспечивал расчеты, хранил сбережения населения. Валютные резервы в СССР большого значения не имели в силу отсутствия обменов рубля на валюту. Для получения баланса Госбанка необходимо сложить балансы всех коммерческих банков с балансом ЦБ, отбросить собственные средства и государственный долг: $N^c + L^{Pc} = L^{cP} + L^{cT} + L^{cH} + W^c$.

Денежная система периода высокой инфляции 1992-1994 годов сформировалась также в отсутствие частных коммерческих банков, в условиях неопределенных отношений к собственности. ЦБ России осуществлял кредитование предприятий (льготные кредиты), вел расчеты и дополнительно кредитовал государственный бюджет. Золотовалютные резервы стали играть существенную роль, а сбережения населения обесценились. Баланс ЦБ в таких условиях: $N^c + L^{Pc} + L^{cg} + \tilde{Z}^c = L^{cP} + L^{cT} + W^c$.

Денежная система периода финансовой стабилизации 1995-1998 годов сформировалась в условиях борьбы с инфляцией, изменились кредитные отношения, возникшая банковская система взяла на себя функции расчетов. Статистические данные показывают, что до 1997 года соблюдался принцип валютного управления. В конце 1997 года этот принцип разрушился – ЦБ выдал кредиты государству.

После кризиса 1998 года денежная политика стала более тонкой. Сначала был восстановлен баланс $\tilde{Z}^c = \tilde{L}^{Bc} + W^c = \tilde{L}^{Bc} + N^A$, затем государство получило дополнительные кредиты от ЦБ, но так, что не возникло сильной инфляции. Это позволило выполнить обязательства бюджета и пополнить оборотные фонды предприятий. Оздоровление экономики позволило сводить бюджет с профицитом. При этом часть избыточных средств была размещена в ЦБ и использована для увеличения золотовалютных резервов. Таким образом, сейчас баланс ЦБ нужно записывать в виде $N^c + L^{cB} + L^{cg} + \tilde{Z}^c = L^{Bc} + L^{Tc} + L^{gc} + W^c$.

4.4.8 ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ

Уравнения балансов только связывают переменные, соответствующие действиям экономических агентов. Для получения полной системы уравнений, описывающих состояние экономики и ее эволюцию, необходимо определить выбор значений этих переменных агентами, т.е. задать стратегии поведения в зависимости от той информации, которой располагают агенты. Для этого, в свою очередь, требуется формализовать описание интересов и целей экономических агентов, их информированность о состоянии экономической системы, а также описать отношения (взаимодействия) экономических агентов. В результате такого подхода экономические отношения можно представить как результат согласованных действий и взаимодействий экономических агентов. Для каждого агента предполагается описание его действий в зависимости от значения информационных переменных, а согласование действий агентов осуществляется поиском таких информационных переменных, при которых выполняются все уравнения материальных и финансовых балансов.

Для окончательного формирования модели необходимо выбрать принципы оптимальности, которыми руководствуются выделенные агенты, и указать технологические ограничения. Для этого надо описать интересы экономических агентов, их информированность о состоянии системы, отношения экономических агентов. Ко-

2.3 Динамическая модель Неймана

Теперь обратимся к учету фактора времени в линейных производственных моделях и сначала рассмотрим динамический вариант модели Неймана (см. п. 1.2.3.1). Будем считать, что матрицы затрат A и выпуска B постоянны, а вектор интенсивностей x меняется со временем. Также предположим, что

- экономика функционирует в течение T периодов времени;
- в каждый период $[t-1, t]$ для производства применяется один из процессов множества $C = \{(y, z) \mid \exists x \geq 0 : y = Ax, z = Bx\}$, характеризующихся вектором интенсивностей $x(t)$;
- на производство в периоде $[t, t+1]$ могут быть потрачены только те продукты, которые были произведены в период $[t-1, t]$ (модель является замкнутой), т.е. $Ax(t) \leq Bx(t-1)$. Значение величины начальных запасов $Bx(0)$ считается. Последовательность векторов $x(1), x(2), \dots, x(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{x(t)\}$, удовлетворяющая этому неравенству, будем называть **планом**.

Здесь мы учтем отмеченный в самом начале главы 2 факт разделения во времени моментов оплаты производителями затрат и получения выручки от продаж. Для этого мы предположим, что все товары имеют цены, изменяющиеся от периода к периоду: $p^i(t-1)$ – цена единицы продукции в период $[t-1, t]$, $p(t-1) = (p^1(t-1), \dots, p^n(t-1))$, $p(t-1) \geq 0$. В таком случае доход производственного процесса (a^j, b^j) в период $[t-1, t]$ составляет $\langle p(t), b^j \rangle - \langle p(t-1), a^j \rangle$. Поскольку рассматриваемая экономическая система является замкнутой, то в ней должно выполняться условие сохранения денежной массы. Это означает, что ни один из процессов не должен иметь положительного дохода: $p(t-1)A \geq p(t)B$.

Определение. Траектория $\{x(t)\}$ называется **стационарной**, если существует число $\nu > 0$, такое что $x(t) = \nu x(t-1)$ (или $x(t) = \nu^t x(0)$).

Для того чтобы траектория интенсивностей $\{x(t)\} = \{\nu^t x\}$ была стационарной в модели Неймана, необходимо и достаточно, чтобы $\nu Ax \leq Bx$. Аналогично, траектория цен $\{p(t)\} = \{\mu^{-t} p\}$ стационарна тогда и только тогда, когда $\mu pA \geq pB$.

Для стационарных траекторий интенсивностей и цен условия неизменности денежной массы (2.10) и (2.11) принимают, соответственно, вид: $\mu pAx = pBx$, $\nu pAx = pBx$.

Определение. Модель Неймана находится в состоянии динамического равновесия, описываемого параметрами (ν, μ, x, p) , где числа $\nu > 0$, $\mu > 0$, а x, p – неотрицательные векторы, если

$$\nu Ax \leq Bx, \quad \mu pA \geq pB, \quad \mu pAx = pBx, \quad \nu pAx = pBx. \quad (2.12)$$

Из системы (2.12) следует, что $\nu = \mu \stackrel{def}{=} \alpha$, т.е. темп роста интенсивности производства и темп падения цен совпадают.

3.1.3 МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Естественным развитием идей общего равновесия является построение динамических моделей вальрасовского типа. Формальное обобщение модели Вальраса на динамический случай не представляет большого труда, однако исследование свойств такой модели оказывается гораздо более сложным.

Пусть экономическая система, в которой существует n типов товаров, функционирует во времени, разделенном на периоды $[0, 1], [1, 2], \dots, [t, t+1], \dots$. Мы будем различать два случая – когда число периодов T конечно и когда оно бесконечно.

Производственный сектор в промежутке $[t, t+1]$ характеризуется технологическим множеством $Z_t \subset \mathbb{R}_+^{2n}$, каждый элемент которого $(x, y) \in Z_t$ представляет собой технологический процесс, осуществляющий выпуск вектора $y \in \mathbb{R}_+^n$ продуктов при материальных затратах $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Потребительский сектор представлен функцией совокупного спроса $\Phi_t: \mathbb{R}_+^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^n}$, которая каждому вектору цен $p_t \in \mathbb{R}_+^n$ на товары в периоде $[t, t+1]$ ставит в соответствие множество $\Phi_t(p_t) \in \mathbb{R}_+^n$ наиболее предпочтительных наборов продуктов. Бу-

дем считать, что на полуинтервале $[t, t+1)$ цены p_t постоянны, а в момент $t+1$ сменяются вектором p_{t+1} .

Реализация технологического процесса $(x, y) \in Z_t$ состоит в том, что вектор x производственных затрат приобретается по ценам p_t периода $[t, t+1)$, а произведенная продукция продается по ценам p_{t+1} следующего периода. Тогда прибыль технологического процесса равна $\langle p_{t+1}, y \rangle - \langle p_t, x \rangle$.

В соответствии с концепцией общего равновесия будем считать, что каждый участник экономической системы действует согласно собственным интересам, ориентируясь только на цены текущего периода:

- потребительский сектор формирует совокупный спрос $c_t \in \Phi_t(p_t)$,
- производственный сектор в период $[t, t+1]$ решает задачу планирования производства с целью максимизации прибыли: $\max_{(x, y) \in Z_t} (\langle p_{t+1}, y \rangle - \langle p_t, x \rangle)$, одно из решений которой (x_t, y_{t+1}) в итоге реализуется.

Действия участников экономической системы согласуются посредством последовательности векторов цен на товары $p_1, p_2, \dots, p_t, \dots$

Определение. Последовательность векторов $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}$, $t = 0, \dots, T$, называется (конечной) равновесной траекторией с началом y_0 , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $c_t \in \Phi_t(p_t)$, $t = 0, \dots, T$;
- 2) $(x_t, y_{t+1}) \in Z_t$, $t = 0, \dots, T-1$;
- 3) $\langle p_{t+1}, y_{t+1} \rangle - \langle p_t, x_t \rangle \geq \langle p_{t+1}, y'_{t+1} \rangle - \langle p_t, x'_t \rangle$ для любых $(x'_t, y'_{t+1}) \in Z_t$, $t = 0, \dots, T-1$;
- 4) $c_t \leq y_t - x_t$, $t = 0, \dots, T$;
- 5) $\langle p_t, c_t \rangle = \langle p_t, y_t - x_t \rangle$, $t = 0, \dots, T$,
- 6) $\langle p_T, x_T \rangle = 0$.

Условия 1)-3) выражают предположения о поведении участников рассматриваемой экономической системы. Условия 4), 5) выявляют регулируемую функцию равновесных цен: условие 4) означает, что спрос не должен превосходить имеющегося запаса товаров, а условия 5) представляет динамический аналог закона Вальраса. Условие 6) является техническим, его необходимость обусловлена конечностью рассматриваемого периода. Если исключить условие 6), то получится определение бесконечной равновесной траектории.

Понятие равновесной траектории имеет следующую интерпретацию. В каждый период времени $[t, t+1]$ участники экономической системы принимают решение о разделении произведенного продукта на две компоненты: x_t , которая будет направлена на производственные нужды, и $s_t = y_t - x_t$, которая пойдет на потребление при условии потребности потребления c_t . Равновесные цены p_t согласуют индивидуальные действия участников экономической системы таким образом, чтобы выполнялись материальный и стоимостной балансы.

Заметим, что условие 3) выполняется тогда и только тогда, когда для любых промежуточных моментов времени t_1 и t_2 , $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, имеет место неравенство:

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} \langle p_t, y_t - x_t \rangle \geq \sum_{t=t_1}^{t_2} \langle p_t, y'_t - x'_t \rangle \quad (3.7)$$

для всех $(x'_t, y'_{t+1}) \in Z_t$, $t = t_1, \dots, t_2 - 1$, $y'_{t_1} = y_{t_1}$, $x'_{t_2} = x_{t_2}$. Действительно, просуммировав неравенства из условия 3), получим

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} (\langle p_{t+1}, y_{t+1} \rangle - \langle p_t, x_t \rangle) \geq \sum_{t=t_1}^{t_2} (\langle p_{t+1}, y'_{t+1} \rangle - \langle p_t, x'_t \rangle).$$

Записав это неравенство в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} -\langle p_{t_1}, x_{t_1} \rangle + \sum_{t=t_1+1}^{t_2-1} (\langle p_t, y_t - x_t \rangle) + \langle p_{t_2}, y_{t_2} \rangle &\geq \\ &\geq -\langle p_{t_1}, x'_{t_1} \rangle + \sum_{t=t_1+1}^{t_2-1} (\langle p_t, y'_t - x'_t \rangle) + \langle p_{t_2}, y'_{t_2} \rangle \end{aligned}$$

и прибавив к обеим частям слагаемое $\langle p_{t_1}, y_{t_1} \rangle - \langle p_{t_2}, x_{t_2} \rangle$ с учетом равенств $y'_{t_1} = y_{t_1}$, $x'_{t_2} = x_{t_2}$, получим неравенство (3.7).

Неравенство (3.7) говорит о том, что равновесная траектория является оптимальной с точки зрения производственного сектора при его стремлении к максимизации суммарной прибыли за период $[t_1, t_2]$ среди всех траекторий с начальным запасом y_{t_1} и обеспечивающих объем производства x_{t_2} .

При $t_1 = 0$ и $t_2 = T$ получаем, что «производственная составляющая» (x_t, y_t) , $t = 0, \dots, T$, всякой равновесной траектории является решением задачи

$$\max_{(x'_t, y'_t) \in Z_t} \sum_{t=0}^T \langle p_t, y'_t - x'_t \rangle$$

при начальном условии $y'_0 = y_0$. Также верно и обратное утверждение.

Как и для статического случая модели Вальраса, здесь возникает вопрос о существовании равновесных траекторий. Оно обеспечивается при выполнении определенных условий.

Сделаем следующие предположения.

1. Отображения $\Phi_t(p)$ определены при любых $p \in \mathbb{R}_+^n$ и непрерывны сверху; множества $\Phi_t(p)$ выпуклы при любом p и ограничены в совокупности при $p \in \mathbb{R}_+^n$.
2. Существует число $\beta > 0$ такое, что неравенство $\langle p, c \rangle \leq \beta$ выполняется при всех $p \in \mathbb{R}_+^n$ и $c \in \Phi_t(p)$, $t = 0, 1, 2, \dots$.
3. Множества Z_t замкнутые и выпуклые в $\mathbb{R}_+^{2n}$, $(0, 0) \in Z_t$, Z_t ограничены в совокупности при $t = 0, 1, 2, \dots$.
4. Существует последовательность $(\tilde{x}_t, \tilde{y}_{t+1}) \in Z_t$, $t = 0, 1, 2, \dots$, для которой $\tilde{y}_t - \tilde{x}_t \geq \tilde{s} > 0$, где $\tilde{s}$ фиксированный вектор, $t = 1, 2, \dots$;
5. $y_0 > 0$.

Требование 1 можно трактовать таким образом, что потребительский сектор формирует свой спрос, не считаясь с возможностями производства, но в разумных пределах. Неравенство 2 оз-

начает, что доход потребителей всегда не превышает определенной величины. Условие 3 делает невозможным неограниченный рост объемов производства. Ограничения 4 и 5 предполагают продуктивность технологий при условии положительного начального запаса.

Теорема. При выполнении условий 1-5 для любого конечного T существует равновесная траектория с началом y_0 .

Теорема. При выполнении условий 1-5 существуют бесконечные равновесные траектории для любого $y_0 > 0$.

Определение. Равновесная траектория $\{p_t^*, c_t^*, x_t^*, y_t^*\}$ называется эффективной, если для любой допустимой последовательности (c_t, x_t, y_t) (для нее выполняются условия 2 и 4 при $t = 0, 1, 2, \dots$), исходящей из $y_0 = y_0^*$, найдется такой номер $\hat{t}$, что для всех $r \geq \hat{t}$ выполняется неравенство $\sum_{t=0}^r \langle p_t^*, c_t^* - c_t \rangle \geq 0$.

Для бесконечных траекторий выполняется магистральное свойство – при определенных условиях все бесконечные эффективные траектории, независимо от начального состояния, близки друг к другу при больших t , а конечные равновесные траектории могут существенно отличаться друг от друга в начале и в конце периода $[0, T]$.

Билет 7. Модель Вальраса. Модель динамического равновесия вальрасовского типа, существование равновесных траекторий.

I Модель Вальраса

Описание:

- Децентрализованная экономика (каждый преследует свои цели)
- Общество состоит из 2 секторов: производственного и потребительского
- Производители: отдельные отрасли, фирмы или индивидуумы
- Потребители: все индивидуумы, организации и учреждения, не участвующие непосредственно в производстве
- Товары: продукты производства [производят производители] и первичные факторы производства (ресурсы, труд) [собственность потребителей]
- Потребители: продают ресурсы для приобретения продуктов производства с целью получения максимального удовлетворения от выбираемого ассортимента продуктов
- Производитель: стремится к максимизации прибыли от производства (разность выручки от продажи произведенного продукта и затрат на необходимые в производстве продукты и ресурсы)
- В некоторых модификациях модели Вальраса разделение между продуктами и ресурсами не производится
- Экономическая система - замкнутая (полученная производителями прибыль полностью распределяется между потребителями)
- (!)Формирование цены: каждый участник экономической системы не может влиять на цену (совершенная конкуренция)
- Цена равновесная, если спрос $\leq$ предложения для каждого товара
- Модель равновесия:

Формальное описание.

l потребителей, m производителей и n типов товаров (нет деления товаров на продукты и ресурсы)

Потребитель i	Производитель k
$K_i(p)$ - функция дохода $\Phi_i(p)$ - функция спроса (см. (1.4)) $K_i(p) = \langle b^i, p \rangle + I_i(p)$ (продажа начального запаса товаров b^i + некоторый дополнительный доход)	Производственный процесс $(x, y) \in \Gamma$ Прибыль от производственного процесса (x, y) составляет $\langle y - x, p \rangle \Rightarrow$ поведение $\langle y - x, p \rangle = \max_{(x', y') \in \Gamma} \langle y' - x', p \rangle.$ $y - x$ - чистый выпуск производителя, $y^k = F(x^k)$ - объем производства $Y^k = \{y^k - x^k \mid x^k \in R_+^n, y^k = F(x^k)\}$ - технологическое множество, компакт. ψ_k - функция предложения (оптимальный производственный процесс) $\Psi(p)$. В терминах чистых выпусков $\Psi(p) = \{y \in Y \mid \langle y, p \rangle = \max_{y' \in Y} \langle y', p \rangle\}.$

$Y = \sum_{k=1}^m Y_k$ - совокупное технологическое множество, $\Psi_0(p) = \sum_{k=1}^m \Psi_k(p)$ - функция

совокупного предложения, $\bar{\Psi}_0(p) = \left\{ y \in Y \mid \langle y, p \rangle = \max_{y' \in Y} \langle y', p \rangle \right\}$ - множество

производственных процессов, оптимальных с точки зрения всего производственного сектора.

Тогда производственные процессы, оптимальные с точки зрения всего производственного сектора, оптимальны и с точки зрения каждого производителя, и наоборот: $\bar{\Psi}_0(p) = \sum_{k=1}^m \Psi_k(p) = \Psi_0(p)$.

Док-во. Пусть $y_0 \in \bar{\Psi}_0(p) \Rightarrow y_0 = \sum_{k=1}^m y_k, y_k \in Y_k$. Пусть $y'_k \in \Psi_k(p) \Rightarrow \langle p, y_0 \rangle = \sum_{k=1}^m \langle p, y_k \rangle \leq \sum_{k=1}^m \langle p, y'_k \rangle = \langle p, \sum_{k=1}^m y'_k \rangle \leq \langle p, y_0 \rangle \Rightarrow \sum_{k=1}^m \langle p, y_k \rangle = \sum_{k=1}^m \langle p, y'_k \rangle$. Т.к. $\langle p, y_k \rangle \leq \langle p, y'_k \rangle \Rightarrow \langle p, y_k \rangle = \langle p, y'_k \rangle$ для всех $k=1..m, y_k \in \Psi_k(p)$. Получили: $\bar{\Psi}_0(p) \subseteq \Psi_0(p)$. Обратное еще более очевидно. ■

Определение. Набор $(y_1^*, \dots, y_m^*; x_1^*, \dots, x_l^*; p^*)$ неотрицательных векторов называется конкурентным равновесием, если

$$y_k^* \in \Psi_k(p^*), k=1, \dots, m, x_i^* \in \Phi_i(p^*), i=1, \dots, l$$

и выполняются соотношения баланса спроса и предложения:

$$\sum_{k=1}^m y_k^* + \sum_{i=1}^l b^i \geq \sum_{i=1}^l x_i^* \text{ (предложение } \geq \text{спрос)}, \left\langle p^*, \sum_{k=1}^m y_k^* + \sum_{i=1}^l b^i \right\rangle = \left\langle p^*, \sum_{i=1}^l x_i^* \right\rangle \text{ (стоимость}$$

купленного = стоимость проданного).

Определение. Вектор p^* называется вектором равновесных цен, многозначное

$$\Phi(p) = \sum_{i=1}^l \Phi_i(p)$$

отображение - функцией совокупного спроса, отображение

$$\Psi(p) = b + \sum_{k=1}^m \Psi_k(p), \text{ где } b = \sum_{i=1}^l b^i, \text{ - функцией совокупного предложения.}$$

Т. (Закон Вальраса в широком смысле). $\langle p, x \rangle \leq \langle p, y \rangle, x \in \Phi(p), y \in \Psi(p)$.

Док-во.

$$\text{Замкнутость } \Rightarrow \text{ для произвольного } y \in \Psi_0(p): \sum_{i=1}^l I_i(p) \equiv \langle y, p \rangle.$$

Если $x \in \Phi(p), x = \sum_{i=1}^l x_i, x_i \in \Phi_i(p)$, то из $\langle x, p \rangle \leq K(p)$ (определение ф-ии спроса) имеем $\langle x_i, p \rangle \leq \langle b_i, p \rangle + I_i(p)$. Суммируем по i: $\langle x, p \rangle \leq \langle b, p \rangle + \sum_{i=1}^l I_i(p)$.

С другой стороны, если $y \in \Phi(p)$, то $b = y + \sum_{k=1}^m y_k, y_k \in \Psi_k(p), k=1..m$. Пусть $y_0 = \sum_{k=1}^m y_k \Rightarrow y_0 \in \Psi_0(p)$ и $\sum_{i=1}^l I_i(p) = \langle y_0, p \rangle \Rightarrow \langle y, p \rangle = \langle b, p \rangle + \sum_{i=1}^l I_i(p)$. ■

Закон Вальраса в узком смысле: $\langle p, x \rangle = \langle p, y \rangle$ (заменяли $\leq$ на $=$).

С использованием понятий функций совокупного спроса и предложения определение конкурентного равновесия можно переформулировать.

Определение. Набор (y^*, x^*, p^*) называется конкурентным равновесием если $x^* \in \Phi(p^*), y^* \in \Psi(p^*), x^* \leq y^*$ и $\langle p^*, x^* \rangle = \langle p^*, y^* \rangle$.

Для некоторого частного случая модели Вальраса - модели Эрроу-Дебре - в лекциях доказано существование равновесия.

Модель Эрроу-Дебре:

1. $K_i(p) = \langle p, b^i \rangle + \sum_{j=1}^m a_{ij} \langle p, y_j \rangle$, где b^i – начальный запас товаров, a_{ij} – доля доходов

j -го производителя, которую получает i -й потребитель, $\sum_{i=1}^l a_{ij} = 1$ для любого j , y_j

– чистый выпуск j -го производителя. Таким образом, мы предполагаем, что капитал потребителя складывается из дохода от продажи начального запаса и участия в прибыли производителей.

2. Множество $X_i \subseteq \mathbb{R}_+^n$, на котором определена ϕ -ия полезности $u_i(x)$, выпукло, замкнуто и неограниченно. Если $\{x^k\} \in X_i$ и $x_j^k \rightarrow \infty$, то $x_j^k \rightarrow \infty$ для всех j .

3. Функция полезности $u_i(x)$ непрерывна и вогнута на X_i .

4. Для любого i найдется такой вектор $\bar{x}^i \in X_i$, что $\bar{x}^i < b^i$ (ненулевые начальные запасы всех товаров).

5. Потребитель ненасыщаем.

6. Множество чистых выпусков k -го производителя Y_k компактно и $0 \in Y_k$, $k = 1, \dots, m$.

7. Совокупное технологическое множество $Y = \sum_{k=1}^m Y_k$ выпукло.

II Динамическая модель равновесия

(Обобщение модели Вальраса на динамический случай – + время).

n типов товаров, время: периоды $[0, 1], [1, 2], \dots, [t, t+1], \dots$

Число периодов T конечно и бесконечно (2 случая).

Производство: $Z_t \subset \mathbb{R}_+^{2n}$ – технологическое множество (все производственные возможности в промежутке $[t, t+1]$), $(x, y) \in Z_t$ – технологический процесс, осуществляющий выпуск вектора $y \in \mathbb{R}_+^n$ продуктов при материальных затратах $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Потребление: $\Phi_t: \mathbb{R}_+^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^n}$ – функция совокупного спроса, ставит в соответствие каждому вектору цен $p_t \in \mathbb{R}_+^n$ $[t, t+1]$ (постоянны в каждый период, в момент $t+1$ сменяются вектором p_{t+1}) множество $\Phi_t(p_t) \in \mathbb{R}_+^n$ – наиболее предпочтительных наборов продуктов.

Чтобы время было существенно: x производственных затрат приобретается по ценам p_t периода $[t, t+1]$, а произведенная продукция продается по ценам p_{t+1} следующего периода. Тогда прибыль технологического процесса: $\langle p_{t+1}, y \rangle - \langle p_t, x \rangle$.

В соответствии с концепцией общего равновесия: каждый участник действует согласно собственным интересам, ориентируясь только на цены текущего периода:

- потребительский сектор формирует совокупный спрос $c_t \in \Phi_t(p_t)$,
- производственный сектор в период $[t, t+1]$ решает задачу максимизации прибыли:
 $\max_{(x,y) \in Z_t} (\langle p_{t+1}, y \rangle - \langle p_t, x \rangle)$, одно из решений которой (x_t, y_{t+1}) в итоге реализуется.

Определение. Последовательность векторов $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}$, $t = 0, \dots, T$, называется (конечной) равновесной траекторией с началом y_0 , если:

- 1) $c_t \in \Phi_t(p_t)$, $t = 0, \dots, T$;
- 2) $(x_t, y_{t+1}) \in Z_t$, $t = 0, \dots, T-1$;
- 3) $\langle p_{t+1}, y_{t+1} \rangle - \langle p_t, x_t \rangle \geq \langle p_{t+1}, y'_{t+1} \rangle - \langle p_t, x'_t \rangle$ для любых $(x'_t, y'_{t+1}) \in Z_t$, $t = 0, \dots, T-1$;
- 4) $c_t \leq y_t - x_t$, $t = 0, \dots, T$; (отсутствие дефицита товара)
- 5) $\langle p_t, c_t \rangle = \langle p_t, y_t - x_t \rangle$, $t = 0, \dots, T$, (аналог закона Вальраса)
- 6) $\langle p_T, x_T \rangle = 0$.

Для $T = \infty$ определение то же, но без п.6.

Интерпретация равновесной траектории: в каждый период времени $[t, t+1]$ участники решают, как разделять произведенный продукта на две компоненты: x_t (идет на производственные нужды) и $s_t = y_t - x_t$ (на потребление при условии потребности потребления c_t). Равновесные цены p_t согласуют индивидуальные действия участников экономической системы таким образом, чтобы выполнялись материальный и стоимостной балансы.

Условие 3) $\Leftrightarrow$ для любых t_1 и t_2 , $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$: $\sum_{t=t_1}^{t_2} \langle p_t, y_t - x_t \rangle \geq \sum_{t=t_1}^{t_2} \langle p_t, y'_t - x'_t \rangle$

для всех $(x'_t, y'_{t+1}) \in Z_t$, $t = t_1, \dots, t_2 - 1$, $y'_{t_1} = y_{t_1}$, $x'_{t_2} = x_{t_2}$. Т.к. просуммируем неравенства из

3): $\sum_{t=t_1}^{t_2} (\langle p_{t+1}, y_{t+1} \rangle - \langle p_t, x_t \rangle) \geq \sum_{t=t_1}^{t_2} (\langle p_{t+1}, y'_{t+1} \rangle - \langle p_t, x'_t \rangle)$. В эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}
 -\langle p_{t_1}, x_{t_1} \rangle + \sum_{t=t_1+1}^{t_2-1} (\langle p_t, y_t - x_t \rangle) + \langle p_{t_2}, y_{t_2} \rangle &\geq \\
 &\geq -\langle p_{t_1}, x'_{t_1} \rangle + \sum_{t=t_1+1}^{t_2-1} (\langle p_t, y'_t - x'_t \rangle) + \langle p_{t_2}, y'_{t_2} \rangle
 \end{aligned}$$

и прибавив к обеим частям слагаемое $\langle p_{t_1}, y_{t_1} \rangle - \langle p_{t_2}, x_{t_2} \rangle$ с учетом равенств $y'_{t_1} = y_{t_1}$, $x'_{t_2} = x_{t_2}$, получим неравенство выше.

При $t_1 = 0$ и $t_2 = T$ получаем, что «производственная составляющая» (x_t, y_t) , $t = 0, \dots, T$, всякой равновесной траектории является решением задачи

$\max_{(x'_t, y'_t) \in Z_t} \sum_{t=0}^T \langle p_t, y'_t - x'_t \rangle$ при начальном условии $y'_0 = y_0$. Также верно и обратное утверждение.

Возникает вопрос о существовании равновесных траекторий. Сделаем следующие предположения.

1. Отображения $\Phi_t(p)$ определены при любых $p \in \mathbb{R}_+^n$ и полунепрерывны сверху; множества $\Phi_t(p)$ выпуклы при любом p и ограничены в совокупности при $p \in \mathbb{R}_+^n$.
2. Существует число $\beta > 0$ такое, что неравенство $\langle p, c \rangle \leq \beta$ выполняется при всех $p \in \mathbb{R}_+^n$ и $c \in \Phi_t(p)$, $t = 0, 1, 2, \dots$.

3. Множества Z_t замкнутые и выпуклые в $\mathbb{R}_+^{2n}$, $(0,0) \in Z_t$, Z_t ограничены в совокупности при $t=0,1,2,\dots$.
4. Существует последовательность $(\tilde{x}_t, \tilde{y}_{t+1}) \in Z_t$, $t=0,1,2,\dots$, для которой $\tilde{y}_t - \tilde{x}_t \geq \tilde{s} > 0$, где $\tilde{s}$ фиксированный вектор, $t=1,2,\dots$;
5. $y_0 > 0$.

Требование 1 трактуется: потребители формируют свой спрос, не считаясь с возможностями производства, но в разумных пределах. Неравенство 2 означает, что доход потребителей всегда не превышает определенной величины. Условие 3 делает невозможным неограниченный рост объемов производства. Ограничения 4 и 5 предполагают продуктивность технологий при условии положительного начального запаса.

Теорема. При выполнении условий 1-5 для любого конечного T существует равновесная траектория с началом y_0 .

Теорема. При выполнении условий 1-5 существуют бесконечные равновесные траектории для любого $y_0 > 0$.

(Обе теоремы шли без доказательства).

Определение. Равновесная траектория $\{p_t^*, c_t^*, x_t^*, y_t^*\}$ называется эффективной, если для любой допустимой последовательности (c_t, x_t, y_t) (для нее выполняются условия 2 и 4 при $t=0,1,2,\dots$), исходящей из $y_0 = y_0^*$, найдется такой номер $\hat{t}$, что для всех $r \geq \hat{t}$ выполняется неравенство $\sum_{t=0}^r \langle p_t^*, c_t^* - c_t \rangle \geq 0$.

Для бесконечных траекторий выполняется магистральное свойство – при определенных условиях все бесконечные эффективные траектории, независимо от начального состояния, близки друг к другу при больших t , а конечные равновесные траектории могут существенно отличаться друг от друга в начале и в конце периода $[0, T]$.

Литература:

- Лекции по Динамическим моделям в макроэкономике
- Ашманов «Математические модели и методы в экономике» (стр.104-116)
- Поспелова «Динамические модели в макроэкономике» (стр. 33-39)

Билет 8

Описание модели Рамсея. Магистральное свойство сбалансированного роста.

Уравнения модели:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(t) = C(t) + I(t), C(t) \geq 0, I(t) \geq 0 \\ Y(t) = M(t)f\left(\frac{L(t)}{M(t)}\right) \\ \frac{dM(t)}{dt} = -\mu M(t) + \frac{I(t)}{b} \\ \frac{dN(t)}{dt} = nL(t) \rightarrow L(t) = L_0 e^{nt} \\ s(t) = \frac{I(t)}{Y(t)} \\ C(t) = (1 - s(t))Y(t) \\ M(0) = M_0; L(0) = L_0 \end{array} \right.$$

Где: $Y(t)$ – ВВП, $C(t)$ – потребление, $I(t)$ – инвестиции,
 $M(t)$ – производственные мощности, μ – темп амортизации, b – природная фондоемкость, $N(t)$ – количество рабочей силы, $s(t)$ – норма накопления.

Если: $\{L(t); M(t); Y(t); I(t); C(t)\}$ – решение системы, и для любого $k \geq 0$
 $\{kL(t); kM(t); kY(t); kI(t); kC(t)\}$ – тоже решение, то система однородна.

$N(t) = N_0 e^{\gamma t}, M(t) = M_0 e^{\gamma t}, Y(t) = Y_0 e^{\gamma t}, I(t) = I_0 e^{\gamma t}, C(t) = C_0 e^{\gamma t}$ – режим сбалансированного роста, где γ – скорость роста.

Подставив их в систему уравнений, получим: (здесь $x_0 = \frac{N_0}{M_0}$)

$$\gamma M_0 = \frac{I_0}{b} - \mu M_0; Y_0 = M_0 f(x_0); N_0 = x_0 M_0; Y_0 = I_0 + C_0; \gamma N_0 = n N_0$$

С 7-ю неизвестными величинами $\gamma, N_0, M_0, x_0, Y_0, I_0, C_0$

После преобразований получим следующее:

$$\gamma = n; I_0 = b(\mu + n)M_0; N_0 = x_0 M_0; Y_0 = M_0 f(x_0); C_0 = N_0 \frac{f(x_0) - b(\mu + n)}{x_0}$$

$$s = \frac{I(t)}{Y(t)} = \frac{b(\mu + n)}{f(x_0)}$$

Потребление на душу населения: $y(x_0) = \frac{C(t)}{N(t)} = \frac{f(x_0) - b(\mu + n)}{x_0}$, условие максимума функции: $f(x^*) - x^* f'(x^*) = b(n + \mu)$ (берем производную по x_0)

Так как $f(x) \leq 1$, то экономика будет продуктивной если $b(\mu + n) < 1$

$$y(x_0) = \frac{1 - b(n + \mu)}{x_0} > 0 \text{ при } x_0 \rightarrow \infty \text{ и } b(n + \mu) < 1$$

$$y(x_0) = \frac{b(n + \mu)}{x_0} < 0 \text{ при } x_0 \rightarrow 0$$

поэтому максимум потребления на душу населения достигается при конечном значении $x_0 = x^*$

Из необходимых условий максимума находим уравнение, определяющее x^* :

$$f(x^*) - x^* f'(x^*) = b(n + \mu) - \text{правило Солоу.}$$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{k(t)}{b} f\left(\frac{b}{k(t)}\right) = \tilde{f}(k(t))$$

$$k = \frac{K}{N} = \frac{b}{x} - \text{фондовооруженность труда, } \tilde{f}(k) = \frac{M}{N} f\left(\frac{N}{M}\right) = \frac{f(x)}{x} - \text{средняя произв-ть труда}$$

$$\text{Тогда } dk = -\frac{b}{x^2} dx \quad \tilde{f}'(k)dk = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} dx \quad \text{откуда получаем } \tilde{f}'(k) = \frac{f(x) - f'(x)x}{b}$$

$$\text{Тогда из } f(x^*) - x^* f'(x^*) = b(n + \mu) \text{ получаем } \tilde{f}'(k^*) = n + \mu - \text{правило Солоу.}$$

Динамическая оптимальность:

$$\text{С учетом начальной системы необходимо найти максимум функционала } \langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{C(t)}{N(t)} dt$$

$$\text{В качестве фазовой переменной берем } k(t) = \frac{bM(t)}{N(t)}, \text{ а в качестве управляющего воздействия } s(t) = \frac{I(t)}{Y(t)}, \text{ с учетом } Y(t) = N(t)\tilde{f}(k(t)).$$

$$\text{Тогда } k' = \frac{bM'N - bMN'}{N^2} = \frac{bM'}{N} - \frac{bMN'}{N^2} = k\left(\frac{M'}{M} - \frac{N'}{N}\right) = k\left(\frac{I}{bM} - (n + \mu)\right) = k\left(\frac{sY}{bM} - (n + \mu)\right) = k\left(\frac{sN\tilde{f}(k)}{bM} - (n + \mu)\right) = s(t)\tilde{f}(k(t)) - (n + \mu)k(t)$$

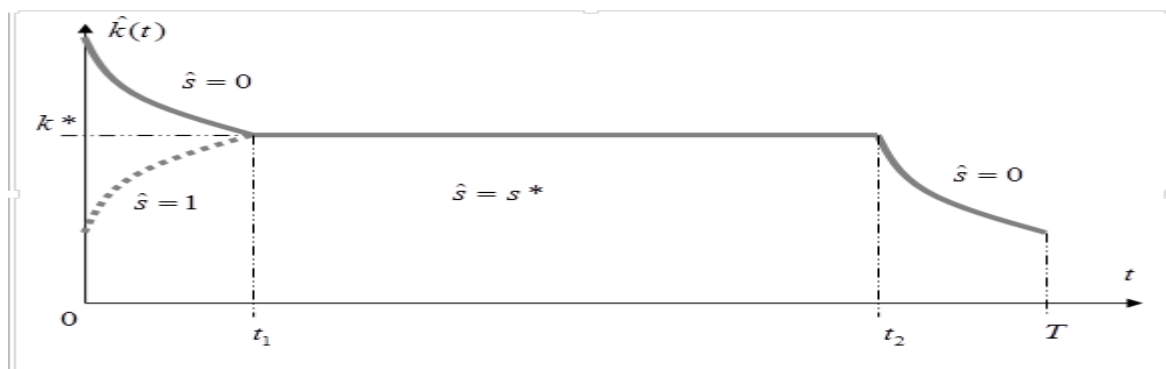
$$C(t) = Y(t) - I(t) = Y(t)(1 - s(t)) = N(t)\tilde{f}(k(t))(1 - s(t))$$

Приходим к следующей задаче оптимального управления:

$$\begin{cases} \int_0^T \tilde{f}(k(t))(1 - s(t))dt \rightarrow \max \\ s(t) \in [0; 1] \\ k(0) = \frac{bM_0}{N_0} \\ \frac{dk}{dt} = s(t)\tilde{f}(k(t)) - (n + \mu)k(t) \end{cases}$$

$$\text{Гамильтониан данной системы: } H(k, q, s) = q(s(t)\tilde{f}(k(t)) - (n + \mu)k(t)) + \tilde{f}(k(t))(1 - s(t))$$

При достаточно большом горизонте планирования график фазовой переменной имеет следующий вид:



Магистральное свойство сбалансированного роста:

Если при фиксированном начальном условии k_0 увеличивать горизонт планирования T , то все большая часть оптимальной траектории будет совпадать со сбалансированным ростом, а значение функционала на оптимальной траектории будет приближаться к значению душевого потребления на оптимальном сбалансированном росте. Это явление – слабая зависимость оптимальных траекторий от начальных условий (а фактически и от конкретного вида функционала) при больших горизонтах планирования – называется магистральным свойством.

9 Существование равновесия в модели Неймана

Теперь обратимся к учету фактора времени в линейных производственных моделях и сначала рассмотрим динамический вариант модели Неймана. Будем считать, что матрицы затрат A и выпуска B постоянны, а вектор интенсивностей x меняется со временем. Также предположим, что

- экономика функционирует в течение T периодов времени;
- в каждый период $[t-1, t]$ для производства применяется один из процессов множества $C = \{(y, z) | \exists x \geq 0 : y = Ax, z = Bx\}$, характеризующихся вектором интенсивностей $x(t)$;
- на производство в периоде $[t, t+1]$ могут быть потрачены только те продукты, которые были произведены в период $[t-1, t]$ (модель является замкнутой), т.е. $Ax(t) \leq Bx(t-1)$. Значение величины начальных запасов $Bx(0)$ считается. Последовательность векторов $x(1), x(2), \dots, x(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{x(t)\}$, удовлетворяющая этому неравенству, будем называть **планом**.

Здесь мы учтем отмеченный в самом начале главы 2 факт разделения во времени моментов оплаты производителями затрат и получения выручки от продаж. Для этого мы предположим, что все товары имеют цены, изменяющиеся от периода к периоду: $p^i(t-1)$ – цена единицы продукции в период $[t-1, t]$, $p(t-1) = (p^1(t-1), \dots, p^n(t-1))$, $p(t-1) \geq 0$. В таком случае доход производственного процесса (a^j, b^j) в период $[t-1, t]$ составляет $\langle p(t), b^j \rangle - \langle p(t-1), a^j \rangle$. Поскольку рассматриваемая экономическая система является замкнутой, то в ней должно выполняться условие сохранения денежной массы. Это означает, что ни один из процессов не должен иметь положительного дохода: $p(t-1)A \geq p(t)B$.

В явном виде предположения о неизменности денежной массы и постоянном ее обращении (вся выручка от продажи идет на закупку сырья) записывается в виде системы:

$$p(t-1)Ax(t) = p(t)Bx(t), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (0.1)$$

$$p(t)Bx(t-1) = p(t)Ax(t), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (0.2)$$

При изучении поведения динамических систем важную роль играют стационарные траектории.

Определение. Траектория $\{x(t)\}$ называется **стационарной**, если существует число $\nu > 0$, такое что $x(t) = \nu x(t-1)$ (или $x(t) = \nu^t x(0)$).

Для того чтобы траектория интенсивностей $\{x(t)\} = \{\nu^t x\}$ была стационарной в модели Неймана, необходимо и достаточно, чтобы $\nu Ax \leq Bx$. Аналогично, траектория цен $\{p(t)\} = \{\mu^{-t} p\}$ стационарна тогда и только тогда, когда $\mu pA \geq pB$.

Для стационарных траекторий интенсивностей и цен условия неизменности денежной массы (0.1) и (0.2) принимают, соответственно, вид: $\mu pAx = pBx$, $\nu pAx = pBx$.

Определение. Модель Неймана находится в состоянии динамического равновесия, описываемого параметрами (ν, μ, x, p) , где числа $\nu > 0$, $\mu > 0$, а x, p – неотрицательные векторы, если

$$\nu Ax \leq Bx, \quad \mu pA \geq pB, \quad \mu pAx = pBx, \quad \nu pAx = pBx \quad (0.3)$$

Из системы (0.3) следует, что $\nu = \mu \stackrel{\text{def}}{=} \alpha$, т.е. темп роста интенсивности производства и темп падения цен совпадают.

Определение. Невырожденным положением равновесия в модели Неймана называется тройка (α, x, p) , где $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}_+^m$, $p \in \mathbb{R}_+^n$, удовлетворяющая соотношениям:

$$\alpha Ax \leq Bx \quad (0.4)$$

$$\alpha pA \geq pB \quad (0.5)$$

$$pAx > 0 \quad . \quad (0.6)$$

Луч $\{y | \exists \mu \geq 0, y = \mu x\}$, где вектор x участвует в невырожденном положении равновесия, называется **лучом Неймана**.

Теорема. Пусть в модели Неймана $A \geq 0$, $B \geq 0$ и в матрице A нет нулевых столбцов, в матрице B нет нулевых строк. Тогда существует решение системы (0.4)-(0.6).

Условия этой теоремы означают, что нет производственных процессов, которые ничего не тратят, и всякий процесс производит продукт.

Доказательство. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} \min u \\ (A - \lambda B)x - ue^n \leq 0, \langle x, e^m \rangle = 1, x \geq 0. \end{aligned} \quad (0.7)$$

Здесь λ – числовой параметр, x , u – переменные, e^n – n -мерный единичный вектор, e^m – m -мерный единичный вектор. Функция $u(\lambda)$, являющаяся значением задачи (0.7) в зависимости от параметра λ , обладает следующими свойствами:

- 1) $u(\lambda)$ непрерывна на всей числовой оси,
- 2) $u(0) > 0$,
- 3) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} u(\lambda) = -\infty$,
- 4) $u(\lambda)$ монотонно убывает.

Из этих свойств следует, что существует $\bar{\lambda} > 0$, для которого $u(\bar{\lambda}) = 0$. Обозначим через $\bar{x}$ соответствующее решение задачи (0.7). Тогда $A\bar{x} \leq \bar{\lambda} B\bar{x}$, $\bar{x} \geq 0$.

Рассмотрим задачу, двойственную к (0.7):

$$\begin{aligned} \max v \\ p(A - \lambda B) - ve^n \geq 0, \langle p, e^n \rangle = 1, p \geq 0. \end{aligned} \quad (0.8)$$

По теореме двойственности $v(\bar{\lambda}) = 0$. Обозначим через $\bar{p}$ соответствующее решение задачи (0.8). Тогда $\bar{p}A \geq \bar{\lambda} \bar{p}B$, $\bar{p} \geq 0$. Таким образом, тройка $(\bar{\lambda}^{-1}, \bar{x}, \bar{p})$ является положением равновесия в модели Неймана. Однако оно может быть вырожденным.

Для указания невырожденного положения равновесия рассмотрим множество решений уравнения $u(\lambda) = 0$. Из свойств функции $u(\lambda)$ нетрудно заключить, что это множество является отрезком $[\lambda_0, \lambda_1]$, причем $\lambda_0 > 0$. Покажем, что существует невырожденное равновесие, соответствующее числу $\alpha = \lambda_1^{-1}$.

Среди всех решений $\bar{p}$ задачи (0.8) выберем p^* , для которого вектор p^*A обладает наибольшим числом положительных компонент. Теперь покажем, что существует вектор x^* , который образует вместе с указанными α и p^* невырожденное положение равновесия. Допустим противное. Тогда из того, что $(A - \lambda_1 B)x \leq 0$ и $x \geq 0$ следует, что $p^*Ax \leq 0$. По теореме о линейных неравенствах, это означает, что существует неотрицательный вектор q , удовлетворяющий условию $q(A - \lambda_1 B) \geq p^*A$.

Вектор q обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (qA)_j &> \lambda_1(qB)_j, \text{ для } j \notin \{j | (pA)_j = 0\}, \\ (qA)_j &= \lambda_1(qB)_j = 0, \text{ для } j \in \{j | (pA)_j = 0\}, \end{aligned}$$

которые означают, что существует $\Delta > 0$ такой, что $qA \geq (\lambda_1 + \Delta)B$, т.е. вектор $(q, 0)$ допустим для задачи (0.8) при $\lambda = \lambda_1 + \Delta$. Следовательно, $u(\lambda_1 + \Delta) = v(\lambda_1 + \Delta) \geq 0$, что противоречит свойствам функции $u(\lambda)$ и максимальности числа λ_1 . Тем самым показано, что числу λ_1 отвечает невырожденное положение равновесия $(\lambda_1^{-1}, x^*, p^*)$, и теорема доказана.

Приведенное доказательство является конструктивным, поскольку оно указывает способ нахождения числа λ_1 , определяющего темп роста экономики в модели Неймана.

Отметим связь между состояниями равновесия модели Неймана и решениями задач (0.7) и (0.8).

Теорема. Тройка (α, x, p) является положением равновесия (быть может, вырожденного) в модели Неймана тогда и только тогда, когда $u(\alpha^{-1})=0$, а пары $(x, 0)$ и $(p, 0)$ являются, соответственно, решениями пары двойственных задач (0.7) и (0.8) при $\lambda = \alpha^{-1}$.

Определение. Число α называется темпом роста.

Определение. Число λ_0 называется **числом Неймана**, число λ_1 – **числом Фробениуса** модели Неймана (A, B) .

Числа $\alpha = \lambda_0^{-1}$ и $\beta = \lambda_1^{-1}$ определяют, соответственно, максимально и минимально возможные темпы роста по стационарной траектории.

Отметим имеющуюся аналогию между собственными числами матрицы Леонтьева и темпами роста модели Неймана с точки зрения продуктивности.

Определение. Модель Неймана (A, B) **продуктивна**, если система $Bx - Ax \geq c$, $x \geq 0$, имеет решение при любом $c \geq 0$.

Теорема. Модель Неймана продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше 1.

10. Модель парной линейной регрессии. Метод наименьших квадратов.

Теорема Гаусса- Маркова.

Глава 2

Модель парной регрессии

2.1. Подгонка кривой

Пусть у нас есть набор значений двух переменных $X_t, Y_t, t = 1, \dots, n$; можно отобразить пары (X_t, Y_t) точками на плоскости $X-Y$ (рис. 2.1).

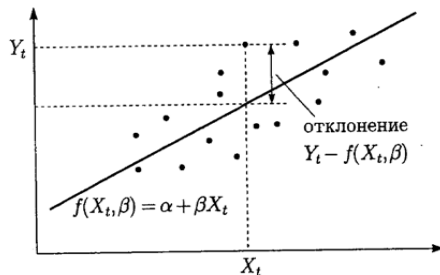


Рис. 2.1

Предположим, что нашей задачей является подобрать («подогнать») функцию $Y = f(X)$ из параметрического семейства функций $f(X, \beta)$, «наилучшим» способом описывающую зависимость Y от X . Подобрать функцию в данном случае означает

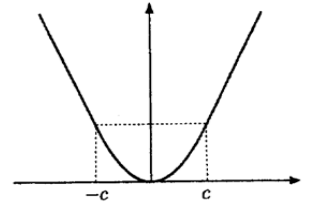
рического семейства может служить семейство линейных функций $f(X, \beta) = \alpha + \beta X$.

В качестве меры отклонения функции $f(X, \beta)$ от набора наблюдений можно взять:

- 1) сумму квадратов отклонений $F = \sum_{t=1}^n (Y_t - f(X_t, \beta))^2$,
- 2) сумму модулей отклонений $F = \sum_{t=1}^n |Y_t - f(X_t, \beta)|$, или, в общем случае,
- 3) $F = \sum_{t=1}^n g(Y_t - f(X_t, \beta))$, где g — «мера», с которой отклонение $Y_t - f(X_t, \beta)$ входит в функционал F .

Примером такой «меры» может служить функция Хубера, которая при малых отклонениях квадратична, а при больших линейна:

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & |x| < c, \\ 2cx - c^2, & x \geq c, \\ -2cx - c^2, & x \leq -c. \end{cases}$$



Рассмотрим достоинства и недостатки перечисленных функционалов.

Сумма квадратов отклонений

Плюсы метода:

- легкость вычислительной процедуры;
- хорошие статистические свойства, простота математических выводов делают возможным построить развитую теорию, позволяющую провести тщательную проверку различных статистических гипотез;

минусы метода:

- чувствительность к «выбросам» (outliers).

Сумма модулей отклонений

Плюсы метода:

- робастность, т.е. нечувствительность к выбросам;

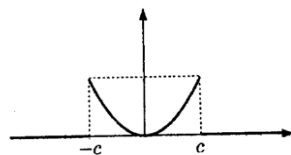
минусы метода:

- сложность вычислительной процедуры;
- возможно, большим отклонениям надо придавать больший вес (лучше два отклонения величиной 1, чем два отклонения величиной 0 и 2);
- неоднозначность, т.е. разным значениям параметра β могут соответствовать одинаковые суммы модулей отклонений (см. упражнение 2.11).

Функция Хубера является попыткой совместить достоинства двух первых функционалов.

Вопрос. Что будет, если взять в качестве функционала

$$F = \sum_{t=1}^n g(Y_t - f(X_t, \beta)),$$



где $g(X) = X^2$ для $|X| < c$, и $g(X) = 0$ для $|X| \geq c$? (Pindyck, Rubinfeld, 1991, п. 1.1, рис. 1.3b, стр. 6).

2.2. Метод наименьших квадратов (МНК)

Рассмотрим задачу «наилучшей» аппроксимации набора наблюдений $X_t, Y_t, t = 1, \dots, n$, линейной функцией $f(X) = a + bX$

в смысле минимизации функционала

$$F = \sum_{t=1}^n (Y_t - (a + bX_t))^2. \quad (2.1)$$

Запишем необходимые условия экстремума (First Order Condition, FOC):

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2 \sum_{t=1}^n (Y_t - a - bX_t) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = -2 \sum_{t=1}^n X_t (Y_t - a - bX_t) = 0,$$

или

$$\sum_{t=1}^n (Y_t - a - bX_t) = 0, \quad \sum_{t=1}^n X_t (Y_t - a - bX_t) = 0. \quad (2.2)$$

Раскроем скобки и получим стандартную форму нормальных уравнений (для краткости опустим индексы суммирования у знака суммы $\sum$):

$$an + b \sum X_t = \sum Y_t, \quad a \sum X_t + b \sum X_t^2 = \sum X_t Y_t. \quad (2.3)$$

Решения $\hat{a}, \hat{b}$ системы (2.3) можно легко найти:

$$\hat{b} = \frac{n \sum X_t Y_t - (\sum X_t)(\sum Y_t)}{n \sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}, \quad (2.4a)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum Y_t - \frac{1}{n} \sum X_t \hat{b} = \bar{Y} - \bar{X} \hat{b}. \quad (2.4b)$$

Замечание 1. Из первого уравнения системы (2.3) следует

$$\bar{Y} = \hat{a} + \hat{b} \bar{X}, \quad (2.5)$$

т.е. уравнение прямой линии $Y = \hat{a} + \hat{b}X$, полученное в результате минимизации функционала (2.1), проходит через точку $(\bar{X}, \bar{Y})$. Здесь через $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ обозначены выборочные средние значения переменных X_t и Y_t : $\bar{X} = (1/n) \sum X_t, \bar{Y} = (1/n) \sum Y_t$.

Замечание 2. Мы предполагаем здесь, что среди $X_t, t = 1, \dots, n$, не все числа одинаковые, т.е. $\text{Var}(X) \neq 0$ и (2.4a) имеет смысл.

Уравнения в отклонениях

Обозначим через $x_t = X_t - \bar{X}$, $y_t = Y_t - \bar{Y}$ отклонения от средних по выборке значений X_t и Y_t , $\bar{X} = (1/n) \sum X_t$, $\bar{Y} = (1/n) \sum Y_t$. (Проверьте, что $\bar{x} = \bar{y} = 0$.)

Решим теперь ту же задачу: подобрать линейную функцию $f(x) = a + bx$, минимизирующую функционал

$$F = \sum_{t=1}^n (y_t - (a + bx_t))^2.$$

Из геометрических соображений ясно, что решением задачи будет та же прямая на плоскости (x, y) , что и для исходных данных X_t, Y_t . В самом деле, в силу (2.5) переход от X, Y к отклонениям x, y означает лишь перенос начала координат в точку $(\bar{X}, \bar{Y})$. Вычисления, которые необходимо проделать для решения задачи, вполне аналогичны предыдущим (с заменой X, Y на x, y). Заменяя в (2.4а), (2.4б) X_t, Y_t на x_t, y_t и учитывая, что $\bar{x} = \bar{y} = (1/n) \sum x_t = (1/n) \sum y_t = 0$, получим

$$\hat{a} = 0, \quad \hat{b} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \frac{\sum (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum (X_t - \bar{X})^2}. \quad (2.6)$$

Таким образом, мы получили другое выражение для углового коэффициента прямой $\hat{b}$ (ср. (2.4а)).

Геометрическая интерпретация

Рассмотрим n -мерное векторное пространство R^n , снабженное стандартным евклидовым скалярным произведением: $(x, y) = x'y = \sum X_t Y_t$, где x' — транспонированная матрица, т. е. в данном случае $1 \times n$ вектор-строка. Пусть

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix},$$

$$\hat{y} = ax + bx, \quad e = y - \hat{y},$$

где a, b — числовые коэффициенты, $\hat{y}$ — вектор, лежащий в двумерной гиперплоскости π , натянутой на векторы z, x . (Здесь мы

снова предполагаем, что векторы z и x неколлинеарны; ср. Замечание 2, стр. 35.) Поставим задачу: найти такие a, b , чтобы вектор e имел наименьшую длину. (Другими словами, мы хотим наилучшим образом аппроксимировать вектор y вектором $\hat{y}$, лежащим в подпространстве π .) Очевидно, решением является такой вектор $\hat{y}$, для которого вектор e перпендикулярен плоскости π . Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор e был ортогонален векторам z и x , порождающим плоскость π :

$$\begin{aligned} z'e = 0 &\iff \sum e_t = 0 \iff \sum (Y_t - a - bX_t) = 0, \\ x'e = 0 &\iff \sum X_t e_t = 0 \iff \sum X_t (Y_t - a - bX_t) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Нетрудно заметить, что мы опять получили необходимые условия экстремума (2.2).

Матричная форма записи

Обозначим теперь через X матрицу размерности $n \times 2$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

— 2×1 матрица (вектор) коэффициентов, $e = y - X\beta$, условие (2.7) ортогональности вектора e плоскости π теперь записывается как $X'e = 0$, или $X'(y - X\beta) = X'y - X'X\beta = 0$. Отсюда получаем $X'X\beta = X'y$, или

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y, \quad (2.8)$$

в предположении, конечно, что векторы z, x линейно независимы и, следовательно, матрица $X'X$ обратима.

Нетрудно проверить, что (2.8) совпадает с (2.4а), (2.4б):

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = \begin{bmatrix} n & \sum X_t \\ \sum X_t & \sum X_t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum X_t Y_t \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица $X'X$ невырождена, так как матрица X имеет максимальный ранг 2 (см. Замечание 2, стр. 35, см. приложение ЛА, п. 10).

2.3. Линейная регрессионная модель с двумя переменными

В предыдущем разделе нас интересовало только качество подгонки кривой. Теперь добавим к постановке задачи некоторые статистические свойства данных.

На самом деле, для одного X мы можем наблюдать разные значения Y .

Пример 1. X — возраст индивидуума, Y — его зарплата.

Пример 2. X — доход семьи, Y — расходы на питание.

Запишем уравнение зависимости Y_t от X_t в виде

$$Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

где X_t — неслучайная (детерминированная) величина, а Y_t, ε_t — случайные величины. Y_t называется объясняемой (зависимой) переменной, а X_t — объясняющей (независимой) переменной или регрессором. Уравнение, приведенное выше, также называется регрессионным уравнением.

Какова природа ошибки ε_t ?

Есть две основные возможные причины случайности:

- Наша модель является упрощением действительности и на самом деле есть еще другие параметры (пропущенные переменные, *omitted variables*), от которых зависят Y . Зарплата, например, может зависеть от уровня образования, стажа работы, пола, типа фирмы (государственная, частная) и т. п.
- Трудности в измерении данных (присутствуют ошибки измерений). Например, данные по расходам семьи на питание составляются на основании записей участников опросов, которые, как предполагается, тщательно фиксируют свои ежедневные расходы. Разумеется, при этом возможны ошибки.

Таким образом, можно считать, что ε_t — случайная величина с некоторой функцией распределения, которой соответствует функция распределения случайной величины Y_t .

Основные гипотезы:

- $Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t, t = 1, \dots, n$, — спецификация модели.
 - X_t — детерминированная величина; вектор $(X_1, \dots, X_n)'$ не коллинеарен вектору $z = (1, \dots, 1)'$.
 - а. $E\varepsilon_t = 0, E(\varepsilon_t^2) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ — не зависит от t .
 - б. $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$, некоррелированность ошибок для разных наблюдений.
- Часто добавляется условие:
- Ошибки $\varepsilon_t, t = 1, \dots, n$, имеют совместное нормальное распределение: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

В этом случае модель называется нормальной линейной регрессионной (*Classical Normal Linear Regression model*).

Замечание. В случае нормальной линейной регрессионной модели условие 3б эквивалентно условию статистической независимости ошибок $\varepsilon_t, \varepsilon_s$ при $t \neq s$ (см. приложение МС, п. 4, N4).

Замечание. Позже будет показано, что многие свойства модели сохраняются при замене условий 3а, б на более слабое условие (X может быть случайной величиной):

$$\begin{aligned} 3'a, b. \quad \text{Cov}(X_t, \varepsilon_s) &= 0 \text{ для всех } t, s, \\ E(\varepsilon_t | X) &= 0, E(\varepsilon_t^2 | X) = \sigma^2 \text{ при всех } t, \\ E(\varepsilon_t \varepsilon_s | X) &= 0 \text{ при всех } t \neq s. \end{aligned}$$

Обсудим гипотезы, лежащие в основе линейной регрессионной модели.

1. Спецификация модели отражает наше представление о механизме зависимости Y_t от X_t и сам выбор объясняющей переменной X_t .

3а, б. Эти условия в векторной форме могут быть записаны так:

$$E\varepsilon = 0, \quad V(\varepsilon) = \sigma^2 I_n,$$

где $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)'$, I_n — $n \times n$ единичная матрица, $V(\epsilon)$ — $n \times n$ матрица ковариаций.

Условие $E\epsilon = 0$ означает, что $EY_t = a + bX_t$, т.е. при фиксированном X_t среднее ожидаемое значение Y_t равно $a + bX_t$.

Условие независимости дисперсии ошибки от номера наблюдения (от регрессора X_t): $E(\epsilon_t^2) = V(\epsilon_t) = \sigma^2$, $t = 1, \dots, n$, называется *гомоскедастичностью* (*homoscedasticity*); случай, когда условие гомоскедастичности не выполняется, называется *гетероскедастичностью* (*heteroscedasticity*). На рис. 2.2а приведен пример типичной картинки для случая гомоскедастичности ошибок; на рис. 2.2б — пример данных с гетероскедастичными ошибками (возможно, что в этом примере $V(\epsilon_t) \sim X_t^2$).

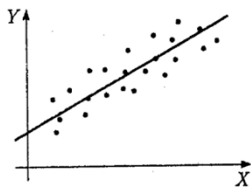


Рис. 2.2а

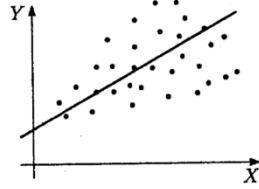


Рис. 2.2б

Условие $E(\epsilon_t \epsilon_s) = 0$, $t \neq s$ указывает на некоррелированность ошибок для разных наблюдений. Это условие часто нарушается в случае, когда наши данные являются временными рядами. В случае, когда это условие не выполняется, говорят об *автокорреляции ошибок* (*serial correlation*).

Для простейшего случая автокорреляции ошибок, когда $E(\epsilon_t \epsilon_{t+1}) = \rho \neq 0$, типичный вид данных представлен на рис. 2.3а ($\rho > 0$) и рис. 2.3б ($\rho < 0$).

Отметим, что условия 3а, б можно также написать в терминах зависимой переменной: $EY_t = a + bX_t$, $V(Y_t) = \sigma^2$, $\text{Cov}(Y_t, Y_s) = 0$, $t \neq s$.

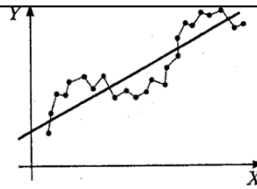


Рис. 2.3а

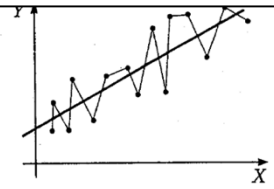


Рис. 2.3б

2.4. Теорема Гаусса–Маркова. Оценка дисперсии ошибок σ^2

Итак, мы имеем набор данных (наблюдений) (X_t, Y_t) , $t = 1, \dots, n$, и модель 1–3аб. Наша задача — оценить все три параметра модели: a , b , σ^2 .

Мы хотим оценить параметры a и b «наилучшим» способом. Что значит «наилучшим»? Например, найти в классе линейных (по Y_t) несмещенных оценок наилучшую в смысле минимальной дисперсии (*Best Linear Unbiased Estimator, BLUE*).

Заметим, что когда такая оценка найдена, это вовсе не означает, что не существует нелинейной несмещенной оценки с меньшей дисперсией. Кроме того, например, можно отбросить требование несмещенности оценки и минимизировать среднеквадратичное отклонение оценки от истинного значения: $E(\hat{b} - b)^2$.

Теорема Гаусса–Маркова. В предположениях модели 1–3аб:

$$1. Y_t = a + bX_t + \epsilon_t, t = 1, \dots, n;$$

$$2. X_t \text{ — детерминированная величина};$$

$$3а. E\epsilon_t = 0, E(\epsilon_t^2) = V(\epsilon_t) = \sigma^2;$$

$$3б. E(\epsilon_t \epsilon_s) = 0, \text{ при } t \neq s;$$

оценки $\hat{a}$, $\hat{b}$ (2.4а), (2.4б), полученные по методу наименьших квадратов (МНК), имеют наименьшую дисперсию в классе всех линейных несмещенных оценок.

Доказательство. 1. Проверим, что МНК-оценки $\hat{a}$, $\hat{b}$ являются несмещенными оценками истинных значений a , b . Из (2.4а), (2.4б), (2.6) получаем:

$$E\hat{b} = E \frac{n \sum X_t Y_t - (\sum X_t)(\sum Y_t)}{n \sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} = E \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \frac{\sum x_t E y_t}{\sum x_t^2} = \frac{\sum x_t (a + b x_t)}{\sum x_t^2} = b,$$

$$E\hat{a} = E \left(\frac{1}{n} \sum Y_t - \frac{1}{n} \sum X_t \hat{b} \right) = E\bar{Y} - \bar{X} E\hat{b} = a + b\bar{X} - \bar{X}b = a.$$

2. Вычислим дисперсии оценок $\hat{a}$, $\hat{b}$.

Представим $\hat{b}$ в виде (ср. (2.6))

$$\hat{b} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \sum w_t y_t, \text{ где } w_t = \frac{x_t}{\sum x_s^2}. \quad (2.9)$$

Легко проверить, что w_t удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} 1) \sum w_t &= 0, \\ 2) \sum w_t x_t &= \sum w_t X_t = 1, \\ 3) \sum w_t^2 &= 1 / \sum x_t^2, \\ 4) \sum w_t y_t &= \sum w_t Y_t, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$V(\hat{b}) = V\left(\sum w_t y_t\right) = V\left(\sum w_t Y_t\right) = \sum w_t^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}, \quad (2.11)$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \bar{X} \hat{b} = \bar{Y} - \bar{X} \sum w_t Y_t = \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X} w_t \right) Y_t, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} V(\hat{a}) &= V\left(\sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X} w_t \right) Y_t\right) = \sigma^2 \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X} w_t \right)^2 \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_t^2} \right) = \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

(при выводе (2.13) мы использовали тождество $\sum x_t^2 \equiv \sum X_t^2 - n\bar{X}^2$).

Упражнение. Используя (2.9), (2.12) и аналогичные вычисления, покажите, что

$$\text{Cov}(\hat{a}, \hat{b}) = -\frac{\bar{X}}{\sum x_t^2} \sigma^2 = -\frac{\bar{X}}{\sum (X_t - \bar{X})^2} \sigma^2. \quad (2.14)$$

3. Покажем, что МНК-оценки являются «наилучшими» (в смысле наименьшей дисперсии) в классе всех линейных несмещенных оценок.

Пусть $\tilde{b} = \sum c_t Y_t$ — любая другая несмещенная оценка. Представим c_t в виде $c_t = w_t + d_t$, тогда

$$E(\tilde{b} - \hat{b}) = 0 = E\left(\sum d_t Y_t\right) = \sum d_t (a + bX_t)$$

для всех a , b . Отсюда

$$\begin{aligned} \sum d_t &= 0; \quad \sum d_t X_t = \sum d_t x_t = 0, \\ V(\tilde{b}) &= V\left(\sum c_t Y_t\right) = \sigma^2 \sum c_t^2 = \sigma^2 \sum (w_t + d_t)^2 \\ &= \sigma^2 \left(\sum w_t^2 + 2 \sum w_t d_t + \sum d_t^2 \right) = \sigma^2 \left(\sum w_t^2 + \sum d_t^2 \right) \\ &= V(\hat{b}) + \sigma^2 \sum d_t^2, \end{aligned}$$

т.е. $V(\tilde{b}) \geq V(\hat{b})$, что и требовалось доказать. (Выше $\sum w_t d_t = 0$ в силу определения w_t (2.9) и того, что $\sum d_t x_t = 0$.)

Аналогичные вычисления показывают, что $V(\tilde{a}) \geq V(\hat{a})$; мы оставим доказательство этого факта в качестве упражнения. Ниже (в главе 3) мы докажем теорему Гаусса–Маркова в общем случае.

Упражнение. Покажите, что $V(\tilde{a}) \geq V(\hat{a})$.

Оценка дисперсии ошибок σ^2

Итак, теперь у нас есть «наилучшие» (в смысле теоремы Гаусса–Маркова) оценки коэффициентов регрессии a , b . Однако в регрессионном уравнении есть еще один параметр — дисперсия ошибок σ^2 .

Обозначим через $\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$ прогноз (*fitted value*) значения Y_t в точке X_t . Остатки регрессии e_t определяются из уравнения

$Y_t = \hat{Y}_t + e_t = \hat{a} + \hat{b}X_t + e_t$. Не следует путать остатки регрессии с ошибками регрессии в уравнении модели $Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t$. Остатки e_t , так же как и ошибки ε_t , являются случайными величинами, однако разница состоит в том, что остатки, в отличие от ошибок, наблюдаемы.

Кажется вполне естественной гипотеза, что оценка σ^2 связана с суммой квадратов остатков регрессии $e_t = Y_t - \hat{a} - \hat{b}X_t$. В самом деле,

$$\begin{aligned}\sum e_t^2 &= \sum (Y_t - \hat{a} - \hat{b}X_t)^2 = \sum (\bar{Y} + y_t - \hat{a} - \hat{b}\bar{X} - \hat{b}x_t)^2 \\ &= \sum (y_t - \hat{b}x_t)^2 = \sum (bx_t + \varepsilon_t - \bar{\varepsilon} - \hat{b}x_t)^2 \\ &= \sum ((b - \hat{b})x_t + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}))^2 \\ &= \sum x_t^2(b - \hat{b})^2 + 2(b - \hat{b}) \sum x_t(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}) + \sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2 \\ &= \text{I} + \text{II} + \text{III}.\end{aligned}$$

Вычислим математическое ожидание $E \sum e_t^2 = E(\text{I}) + E(\text{II}) + E(\text{III})$.

$$E(\text{I}) = E \left(\sum x_t^2(b - \hat{b})^2 \right) = \sum x_t^2 V(\hat{b}) = \sum x_t^2 \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} = \sigma^2.$$

Используя соотношение $\hat{b} = \sum w_t y_t = \sum w_t (bx_t + \varepsilon_t - \bar{\varepsilon}) = b + \sum w_t \varepsilon_t$, получаем

$$\begin{aligned}E(\text{II}) &= -2E \left(\sum_t w_t \varepsilon_t \sum_s x_s (\varepsilon_s - \bar{\varepsilon}) \right) \\ &= -2E \left(\sum_{t,s} w_t x_s \varepsilon_t \varepsilon_s - \sum_t w_t \varepsilon_t \bar{\varepsilon} \sum_s x_s \right) \\ &= -2 \sum_t w_t x_t \sigma^2 = -2\sigma^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(\text{III}) &= E \left(\sum \varepsilon_t^2 - 2\bar{\varepsilon} \sum \varepsilon_t + n\bar{\varepsilon}^2 \right) \\ &= n\sigma^2 - 2n \frac{1}{n} \sigma^2 + n \frac{1}{n} \sigma^2 = (n-1)\sigma^2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$E \sum e_t^2 = E(\text{I}) + E(\text{II}) + E(\text{III}) = \sigma^2 - 2\sigma^2 + (n-1)\sigma^2 = (n-2)\sigma^2.$$

Отсюда следует, что

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum e_t^2 \quad (2.15)$$

является несмещенной оценкой дисперсии ошибок σ^2 .

Формулы (2.11), (2.13) дают дисперсии оценок $\hat{a}$, $\hat{b}$ коэффициентов регрессии в том случае, если σ^2 известно. На практике, как правило, дисперсия ошибок σ^2 неизвестна и оценивается по наблюдениям одновременно с коэффициентами регрессии a , b . В этом случае вместо дисперсий оценок $\hat{a}$, $\hat{b}$ мы можем получить лишь оценки дисперсий $\hat{a}$, $\hat{b}$, заменив σ^2 на s^2 из (2.15) в (2.11), (2.13), (2.14):

$$\begin{aligned}\hat{V}(\hat{b}) &= s^2 \frac{1}{\sum x_t^2} = \frac{s^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}, \\ \hat{V}(\hat{a}) &= s^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2} = \frac{s^2 \sum X_t^2}{n \sum (X_t - \bar{X})^2}, \\ \widehat{\text{Cov}}(\hat{a}, \hat{b}) &= -\frac{\bar{X}}{\sum x_t^2} s^2 = -\frac{\bar{X} s^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}.\end{aligned} \quad (2.16)$$

Стандартные отклонения оценок коэффициентов регрессии, которые приводятся в результатах регрессии в статистических пакетах, вычисляются на основе этих формул ($s_{\hat{b}} = \sqrt{\hat{V}(\hat{b})}$).

Замечание. Предположим, что мы изучаем зависимость Y от X и число наблюдений n задано, но мы можем выбирать набор $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Как выбрать X_i так, чтобы точность оценки углового коэффициента b была наибольшей? Дисперсия оценки $\hat{b}$ задается формулой (2.16), откуда видно, что чем больше $\sum x_t^2$, тем меньше дисперсия $V(\hat{b})$. Поэтому желательно выбирать X_t таким образом, чтобы их разброс вокруг среднего значения был большим.

Замечание. Из формулы (2.14) для ковариации оценок свободного члена a и углового коэффициента b следует, что $\text{Cov}(\hat{a}, \hat{b}) < 0$, если $\bar{X} > 0$. Это соответствует геометрической интуиции (рис. 2.4). В самом деле, график уравнения регрессии $Y = \hat{a} + \hat{b}X$ в силу (2.5) проходит через точку с координатами $(\bar{X}, \bar{Y})$, поэтому

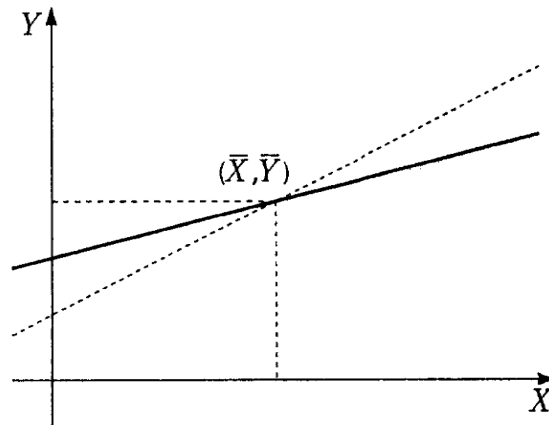


Рис. 2.4

при увеличении $\hat{b}$ (повороте прямой вокруг точки $(\bar{X}, \bar{Y})$ против часовой стрелки) величина $\hat{a}$ уменьшается.

11. Модель множественной регрессии. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова.

Естественным обобщением линейной регрессионной модели с двумя переменными (см. п. 2.3) является *многомерная регрессионная модель* (*multiple regression model*), или *модель множественной регрессии*:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

или

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

где x_{tp} — значения регрессора x_p в наблюдении t , а $x_{t1} = 1$, $t = 1, \dots, n$. С учетом этого замечания мы не будем далее различать модели вида (3.1) со свободным членом или без свободного члена.

3.1. Основные гипотезы

Гипотезы, лежащие в основе модели множественной регрессии, являются естественным обобщением модели парной регрессии (см. п. 2.3):

1. $y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$, $t = 1, \dots, n$ — спецификация модели.

2. $x_{t1}, \dots, x_{tk}$ — детерминированные величины. Векторы $x_s = (x_{1s}, \dots, x_{ns})'$, $s = 1, \dots, k$ линейно независимы в R^n .

3а. $E\epsilon_t = 0$, $E(\epsilon_t^2) = V(\epsilon_t) = \sigma^2$ — не зависит от t .

3б. $E(\epsilon_t \epsilon_s) = 0$ при $t \neq s$ — статистическая независимость (некоррелированность) ошибок для разных наблюдений.

Часто добавляется следующее условие.

3с. Ошибки ϵ_t , $t = 1, \dots, n$ имеют совместное нормальное распределение: $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

В этом случае модель называется *нормальной линейной регрессионной (classical normal linear regression model)*.

Гипотезы, лежащие в основе множественной регрессии, удобно записать в матричной форме, которая главным образом и будет использоваться в дальнейшем.

Пусть y обозначает $n \times 1$ матрицу (вектор-столбец) $(y_1, \dots, y_n)'$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$ — $k \times 1$ вектор коэффициентов; $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)'$ — $n \times 1$ вектор ошибок;

$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}$ — $n \times k$ матрицу объясняющих переменных.

Столбцами матрицы X являются $n \times 1$ векторы регрессоров $x_s = (x_{1s}, \dots, x_{ns})'$, $s = 1, \dots, k$. Условия 1–3 в матричной записи выглядят следующим образом:

1. $y = X\beta + \epsilon$ — спецификация модели;

2. X — детерминированная матрица, имеет максимальный ранг k ;

3а, б. $E(\epsilon) = 0$; $V(\epsilon) = E(\epsilon\epsilon') = \sigma^2 I_n$;

дополнительное условие:

3с. $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$, т. е. ϵ — нормально распределенный случайный вектор со средним 0 и матрицей ковариаций $\sigma^2 I_n$ (нормальная линейная регрессионная модель).

3.2. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса–Маркова

Как и в случае регрессионного уравнения с одной переменной (см. п. 2.2), целью метода является выбор вектора оценок $\hat{\beta}$, минимизирующего сумму квадратов остатков e_i (т. е. квадрат длины вектора остатков e):

$$e = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta}, \quad ESS = \sum e_i^2 = e'e \rightarrow \min.$$

Выразим $e'e$ через X и β :

$$\begin{aligned} e'e &= (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) = y'y - y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \\ &= y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Необходимые условия минимума ESS получаются дифференцированием (3.2) по вектору $\hat{\beta}$ (см. (ЛА.22), (ЛА.24)):

$$\frac{\partial ESS}{\partial \hat{\beta}} = -2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0, \quad (3.3)$$

откуда, учитывая обратимость матрицы $X'X$ в силу условия 2 (приложение ЛА, п. 10), находим оценку метода наименьших квадратов:

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y. \quad (3.4)$$

(Сравните с аналогичной формулой (2.8), полученной для регрессионного уравнения с одной независимой переменной.)

Покажем, что, как и в случае одного регрессора, (3.3) означает, что вектор остатков e ортогонален всем независимым переменным $x_1, \dots, x_k$ (столбцам матрицы X). Условие $x_1'e = \dots = x_k'e = 0$ эквивалентно равенству $X'e = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} X'e &= X'(y - X\hat{\beta}) = X'y - X'X\hat{\beta} \\ &= X'y - X'X(X'X)^{-1}X'y = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Получим полезную в дальнейшем формулу для суммы квадратов остатков

$$\begin{aligned} e'e &= y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \\ &= y'y - \hat{\beta}'(2X'y - X'X(X'X)^{-1}X'y) = y'y - \hat{\beta}'X'y. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Геометрическая интерпретация в основном совпадает с геометрической интерпретацией регрессионного уравнения с одной независимой переменной (см. п. 2.2). Представим $y, x_1, \dots, x_k$ как векторы в n -мерном евклидовом пространстве R^n . Векторы $x_1, \dots, x_k$ порождают k -мерное подпространство π .

Вектор $\hat{y} = X\hat{\beta}$ есть ортогональная проекция вектора y на гиперплоскость π .

Вектор остатков $e = y - \hat{y}$ ортогонален подпространству π .

Как и в случае регрессионного уравнения с одной независимой переменной (см. п. 2.4), можно показать, что оценка метода наименьших квадратов является оптимальной.

Теорема Гаусса–Маркова. *Предположим, что:*

1. $y = X\beta + \varepsilon$;
2. X — детерминированная $n \times k$ матрица, имеющая максимальный ранг k ;
3. $E(\varepsilon) = 0$; $V(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n$.

Тогда оценка метода наименьших квадратов $\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y$ является наиболее эффективной (в смысле наименьшей дисперсии) оценкой в классе линейных (по y) несмещенных оценок (*Best Linear Unbiased Estimator, BLUE*).

Доказательство. Обозначим $A = (X'X)^{-1}X'$, $\hat{\beta}_{OLS} = Ay$. Любую другую линейную оценку вектора параметров β можно без ограничения общности представить в виде: $b = (A + C)y$, где C — некоторая $k \times n$ матрица.

1. Покажем, что МНК-оценка (3.4) является несмещенной оценкой β :

$$\begin{aligned} E\hat{\beta}_{OLS} &= E((X'X)^{-1}X'y) = (X'X)^{-1}X'E(y) \\ &= (X'X)^{-1}X'E(X\beta + \varepsilon) \\ &= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'E\varepsilon = \beta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из условия несмещенности оценки b получаем, что для всех β справедливо соотношение

$$\beta = Eb = (A + C)Ey = (A + C)X\beta = (I + CX)\beta,$$

откуда следует, что $CX = 0$.

2. Подсчитаем матрицу ковариаций МНК-оценки:

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}_{OLS}) &= V(Ay) = AV(y)A' = A\sigma^2IA' \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} = \sigma^2(X'X)^{-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

(здесь мы использовали симметричность матрицы $X'X$ и свойство матрицы ковариаций (МС.9)).

3. Используя полученное выше равенство $CX = 0$, получаем

$$\begin{aligned} b - \beta &= (A + C)y - \beta = (A + C)X\beta + (A + C)\epsilon - \beta \\ &= AX\beta - \beta + CX\beta + (A + C)\epsilon = (A + C)\epsilon, \end{aligned}$$

т. к. $CX = 0$ и $AX = I$. Вычислим теперь матрицу ковариаций вектора b :

$$\begin{aligned} V(b) &= E((b - \beta)(b - \beta)') = E((A + C)\epsilon\epsilon'(A + C)') \\ &= (A + C)\sigma^2I(A + C)' = \sigma^2(AA' + CA' + AC' + CC') \\ &= \sigma^2((X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} + CX(X'X)^{-1} \\ &\quad + (X'X)^{-1}X'C' + CC') = \sigma^2(X'X)^{-1} + \sigma^2CC'. \end{aligned}$$

Таким образом (см. (3.8)),

$$V(b) = V(\hat{\beta}_{OLS}) + \sigma^2CC'.$$

Матрица CC' неотрицательно определена (приложение ЛА, п. 15), поэтому

$$V(b) \geq V(\hat{\beta}_{OLS}). \quad (3.9)$$

Отсюда следует утверждение теоремы. В самом деле, i -й диагональный элемент матрицы $V(b)$ равен дисперсии i -й компоненты вектора коэффициентов $V(b_i)$. Поэтому (приложение ЛА, п. 15) из (3.9) следует соответствующее неравенство для дисперсий оценок коэффициентов регрессии

$$V(b_i) \geq V(\hat{\beta}_{OLS,i}),$$

что и требовалось доказать.

Билет 12

Понятие временного ряда. Понятие строго стационарного временного ряда. Условия стационарности временного ряда в широком смысле.

Пусть $t_1, t_2, \dots, t_m, \dots$ ($t_i \leq t_{i+1} \forall i$) - дискретные моменты времени. Пусть $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}, \dots$ - случайные величины, соответствующие этим моментам времени. Последовательность $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}, \dots$ называется *временным рядом*.

$F(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = P\{X_{t_1} < x_{t_1}, \dots, X_{t_n} < x_{t_n}\}$ - совместная функция распределения величин $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$.

$p(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ - совместная плотность распределения величин $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$.

Определение 1.

Ряд X_t называется *строго стационарным* или *стационарным в узком смысле*, если совместное распределение m наблюдений $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}$ не зависит от сдвига по времени, то есть совпадает с распределением $X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \dots, X_{t_m+\tau}$ (то есть $p(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = p(x_{t_1+\tau}, \dots, x_{t_m+\tau})$) для любых $m, \tau, t_1, \dots, t_m$.

Определение 2.

Ряд X_t называется *слабо стационарным* или *стационарным в широком смысле*, если среднее, дисперсия и ковариации X_t не зависят от момента времени t :

$$E(X_t) = \mu < \infty, \quad D(X_t) = \gamma(0), \quad Cov(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau).$$

Из строгой стационарности следует слабая стационарность. В дальнейшем под стационарностью будем понимать слабую стационарность.

Для стационарного ряда обозначим через $\varrho(\tau) = corr(X_t, X_{t+\tau}) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)}$ коэффициент корреляции.
 $\varrho(\tau) = \varrho(-\tau)$.

Примеры.

1. *Гауссовский* процесс - ряд X_t с независимыми одинаково распределенными наблюдениями, подчиняющимися нормальному закону:

$$X_t \sim N(\mu, \sigma^2), \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad \varrho(\tau) = 0 \quad \forall \tau \neq 0.$$

Стационарен.

2. Процесс «белого шума» - временной ряд ε_t с независимыми одинаково распределенными наблюдениями:

$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad D(\varepsilon_t) = \sigma^2, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad \varrho(\tau) = 0 \quad \forall \tau \neq 0.$$

Стационарен.

3. Гауссовский процесс «белого шума» - временной ряд ε_t с независимыми одинаково распределенными наблюдениями, подчиняющимися нормальному закону с нулевым математическим ожиданием:

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad \varrho(\tau) = 0 \quad \forall \tau \neq 0.$$

Стационарен.

4. Процесс $AR(1)$ (autoregressive model):

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad a \neq 0,$$

где ε_t - процесс белого шума. Стационарен при $|a| < 1$.

Билет 13. Нестационарный процесс авторегрессии – интегрированного скользящего среднего ARIMA(p,d,q).

Рассмотрим нестационарный ряд случайного блуждания $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$. При взятии первой разности $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ получается стационарный ряд $\Delta X_t = Y_t = \varepsilon_t$.

Рассмотрим ряд вида:

$$X_t = a + bt + \gamma t^2 + \varepsilon_t$$

(тренд является параболической функцией времени)

$$\Delta X_t = a + bt + \gamma t^2 + \varepsilon_t - a - b(t-1) - \gamma(t-1)^2 + 2\gamma t - \gamma - \varepsilon_{t-1} = b + 2\gamma t - \gamma + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

$$\Delta^2 X_t = \Delta X_t - \Delta X_{t-1} = 2\gamma + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$$

Бокс и Дженкинс выделили класс нестационарных рядов ARIMA(p,d,q), который взятием d последовательных разностей приводится к стационарному (p-параметр AR-части, d-степень интеграции, q-параметр MA-части). ARIMA является расширением моделей ARMA.

$$a_p(L)(1-L)^d X_t = b_q(L)\varepsilon_t$$

Если обозначить $a_p(L)(1-L)^d X_t = Y_t$, получим стационарный процесс.

Задачу построения модели ARIMA по реализации случайного процесса Бокс и Дженкинс разбили на 4 этапа:

- Установить порядок интеграции d (то есть добиться стационарности ряда). После получаем временной ряд, к которому нужно подобрать ARMA(p,q) (то есть установить порядок p и q), исходя из автокорреляционной и частной автокорреляционной функций;
- Оценивание $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ при условии, что известны p и q;
- По остаткам осуществляется тестирование (диагностика модели);
- Использование модели для прогнозирования значений временного ряда.

Рассмотрим процесс $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

Оценка матожидания: $\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$.

Оценка дисперсии: $S^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2$.

Оценка коэффициента автокорреляции: $\hat{\rho}_k = \frac{1}{TS^2} \sum_{t=k+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})$.

Подход Бокса-Дженкинса

До сих пор мы рассматривали случайные процессы, в частности ARIMA, как некоторую математическую конструкцию. При моделировании экономических процессов мы встречаемся с обратной ситуацией, когда у нас есть реализация ряда, и надо подобрать соответствующую теоретическую конструкцию, которая могла бы породить такую реализацию, то есть построить модель экономического процесса. Пользуясь терминологией Д. Хендри, будем иногда называть такую модель

DGP (*Data Generating Process*). Бокс и Дженкинс предложили следующий подход к выбору модели типа ARIMA по наблюдаемой реализации временного ряда.

Прежде чем описывать этот метод, надо ввести еще одно понятие, которое необходимо иметь в виду, занимаясь оценением или подбором модели, порождающей реализацию временного ряда. Мы говорили, что стохастический процесс – это функция как бы двух величин: времени и случайности. Когда случайность фиксирована, мы рассматриваем одну реализацию. Однако все наши рассуждения касаются характеристик случайных величин, таких как математическое ожидание $E\{X_t\}$ и другие. Это подразумевает, что в каждый заданный момент времени мы имеем всю генеральную совокупность случайной величины, соответствующую этому моменту времени. Всякий раз усреднение идет по повторяющейся выборке. Однако в нашем распоряжении – одна единственная реализация. Поэтому любая статистика, с которой мы будем иметь дело, может использовать только реализацию, а не повторяющуюся выборку. Единственной, по сути, возможностью остается усреднение по реализации, по времени. Поэтому нам нужны основания, чтобы считать, что усреднение по времени в каком то смысле эквивалентно усреднению по всевозможным значениям генеральной совокупности. Процессы, которые обладают таким свойством, называются *эргодическими* (*ergodic*). Недостаточно для процесса быть стационарным, вообще говоря, нужно еще, чтобы процесс был эргодическим. Иногда это свойство называют свойством хорошего перемешивания. Разбросанные в разные моменты времени значения временного ряда должны составить такую же качественно выборку, как повторная выборка в один и тот же момент времени.

Эргодичность – это свойство, позволяющее для оценки математических ожиданий использовать усреднения по времени (по реализации). Например, мы хотим оценить математическое ожидание. Мы должны взять всевозможные значения в один и тот же момент времени t . У нас таких нет. Но у нас есть значения в другие моменты времени. Свойство хорошего перемешивания означает, что если у нас достаточно длинная реализация, то можно заменить усреднение по ансамблю, по множеству, усреднением по времени. Для того, чтобы стационарный процесс был

эргодичным, достаточно выполнения следующего условия [3] $(T^{-1} \sum_{k=1}^T \gamma_k) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$.

Мы видим, что стационарные процессы ARMA(p,q) обладают свойством эргодичности. Нестационарный процесс не может быть эргодическим. Но не всякий стационарный процесс эргодичен, хотя для практических целей наличие стационарности неявно подразумевает эргодичность. Важно понимать, что одной стационарности при статистической обработке реализаций недостаточно.

Задачу построения модели типа ARIMA по реализации случайного процесса Бокс и Дженкинс предложили разбить на несколько этапов.

1 этап

1. Установить порядок интеграции d , то есть добиться стационарности ряда, взяв достаточное количество последовательных разностей. Другими словами, «остационарить» ряд.

2. После этого мы получаем временной ряд Y_t , к которому нужно подобрать уже ARMA(p,q). Исходя из поведения автокорреляционной (SACF) и частной автокорреляционной функций (SPACF)⁴⁾, установить параметры p и q .

I этап принято называть *идентификацией модели* ARIMA(p,d,q). Это всего лишь определение величин p, d, q , но именно в такой последовательности: сначала d , а потом p и q .

II этап

Оценивание коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ при условии, что мы уже знаем p и q .

III этап

Стандартная для эконометрического подхода процедура. По остаткам осуществляется тестирование или диагностика построенной модели.

IV этап

Использование модели, в основном, для прогнозирования будущих значений временного ряда.

Бокс и Дженкинс применили этот подход ко многим временным рядам, которые были известны в то время, как к финансовым, так и к макроэкономическим. Правда, надо сказать, что макроэкономические ряды тогда были, в основном, короткие. Бокс и Дженкинс смогли построить модели типа ARIMA для всех исследуемых рядов и установили, в частности, что практически все экономические процессы описываются моделями с относительно небольшими величинами параметров p и q , а параметр d обычно не превышает 2. К тому же оказалось, что точность прогнозирования по моделям ARIMA оказалась выше, чем давали в то время эконометрические модели. Бокс и Дженкинс приложили много усилий, пропагандируя использование моделей типа ARIMA, которые дают удобное и компактное описание очень многих процессов.

Если исследуемый ряд нестационарный, то его автокорреляционная функция не будет убывать. Если ряд стационарен, то мы знаем, что, начиная с какого-то номера, теоретические автокорреляции будут убывать. Поэтому можно рассчитать их оценки – выборочные автокорреляции, и посмотреть, убывают они или нет. Если ряд окажется стационарным, перейти к определению параметров p и q . Если нет, то надо построить ряд первых разностей и проверить на стационарность его.

Рассмотрим, например, процесс $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$. При $\alpha > 1$ взятие первой разности не поможет сделать ряд стационарным. Это нестационарный ряд взрывного типа, оценки его «автокорреляционной» функции растут с увеличением сдвига во времени. Если же $\alpha = 1$, то ряд представляет собой случайное блуждание и после взятия первой разности он станет стационарным.

Переходим к оцениванию по выборке статистических характеристик исследуемого процесса в предположении его эргодичности. В качестве оценки математического ожидания применяется статистика $\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$, то есть обычное сред-

⁴⁾ S – от слова выборочный. Полная аббревиатура означает Sample Autocorrelation Function и Sample Partial Autocorrelation Function соответственно.

нее по выборке. В качестве оценки дисперсии процесса обычно принимается следующая величина: $S^2 = T^{-1} \sum (X_t - \bar{X})^2$. Обратите внимание, делитель не $(T-1)$, как привычно для обработки независимых наблюдений, а T . Для оценки коэффициен-

та теоретической автокорреляции используем $r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})}{T \cdot S^2}$. Это озна-

чает, что для расчета выборочных ковариаций используется одинаковый делитель — T , что, в случае независимых наблюдений, дает смещенные оценки соответствующих теоретических ковариаций. Если бы мы требовали несмещенности оценок, то у нас бы были разные делители при различных k . Кроме того, при увеличении k уменьшается объем выборки, пригодный для расчета оценки соответствующего коэффициента корреляции. На практике, по рекомендации, идущей еще от Бокса и Дженкинса, не рассчитываются оценки r_k для $k > T/4$.

Одним из следствий выбора именно таких оценок значений автокорреляционной функции является гарантированная положительная определенность выборочной корреляционной матрицы. Ранее мы отмечали наличие такого свойства у теоретической автокорреляционной функции. При одинаковом делителе у оценок автокорреляционной функции при различных k положительная определенность выборочной корреляционной матрицы гарантирована. Поэтому мы предпочитаем пусть смещенную оценку, но гарантирующую это свойство. Во-вторых, при дополнительном предположении о нормальности распределения значений процесса именно эта оценка совпадает с оценкой метода максимального правдоподобия. Поэтому мы жертвуем здесь несмещенностью, тем более, что у нас обычно T — относительно большое, добиваясь 2-х вещей: 1) приближаясь к методу максимального правдоподобия, а он здесь основной, очень важный метод; 2) добиваясь положительной определенности соответствующей автокорреляционной матрицы оценок

$$\begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & \\ r_2 & & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

В качестве оценок частной автокорреляционной функции $\hat{\phi}_{kk}$ принимаются значения выборочной частной автокорреляционной функции SPACF, которые получаются как коэффициенты выборочной регрессии текущего центрированного значения ряда на k его предыдущих значений

$$(X_t - \bar{X}) = \phi_{k1}(X_{t-1} - \bar{X}) + \dots + \phi_{kk}(X_{t-k} - \bar{X}) + \varepsilon_t.$$

Коэффициент $\hat{\phi}_{kk}$ при последнем члене и есть оценка коэффициента ϕ_{kk} частной автокорреляционной функции. То, что полученная оценка отражает статистическую линейную связь между x_t и x_{t-k} , очищенную от влияния промежуточных значений, подтверждает замечательная теорема Фриша-Вау (1933), которая заключается в следующем.

Теорема Фриша-Вау. Пусть Y – объясняемая переменная, а объясняющие переменные разбиты на две группы: $X_1, \dots, X_k, Z_1, \dots, Z_l$. Обозначим через $u, v_1, \dots, v_k$ остатки метода наименьших квадратов (МНК) от регрессий $Y, X_1, \dots, X_k$ соответственно на совокупность $Z_1, \dots, Z_l$. Тогда оценки МНК коэффициентов регрессии u_k на $v_1, \dots, v_k$ совпадают с оценками при переменных $X_1, \dots, X_k$ в регрессии Y на всю совокупность $X_1, \dots, X_k, Z_1, \dots, Z_l$.

В математике многие результаты можно выразить в различных терминах. Так теорема Фриша-Вау выражает в терминах коэффициентов регрессий просто формулу обращения блочной матрицы.

Свойства выборочных моментов процесса

Для того, чтобы установить свойства выборочных оценок, введенных ранее, требуются довольно громоздкие и утонченные математические выкладки. Поэтому наиболее сложные результаты мы приведем без доказательства.

Выборочное среднее очевидно является несмещенной оценкой математического ожидания процесса, если он стационарен. Легко выразить дисперсию выборочного среднего:
$$\text{var}(\bar{X}) = T^{-2} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \gamma_{|i-j|} = T^{-2} \sum_{i-j=-T}^T (T - |i-j|) \gamma_{i-j} = T^{-1} \sum_{k=-T}^T \left(1 - \frac{|k|}{T}\right) \gamma_k.$$

Если теоретические ковариации стремятся к нулю при увеличении k , то $\text{var}(\bar{X}) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$, и наша оценка будет состоятельной. Если процесс X_t является гауссовым, то и оценка $\bar{X}$ распределена нормально. Более того, эта оценка является суммой случайных величин, более или менее большого количества, и при каких-то достаточно слабых условиях здесь будет работать Центральная Предельная Теорема (ЦПТ). Можно строго математически показать, что для процесса типа ARMA оценка $\bar{X}$ распределена асимптотически нормально, даже для негауссова процесса.

Получение асимптотического распределения оценок r_k сопряжено с большими математическими выкладками, хотя и основано на тех же идеях, что и полученное выше. Сформулируем основные результаты без вывода. Если теоретические автокорреляции $\rho_k = 0$ для всех $k > 0$, то $\text{var}(r_k) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T}$. Это более точный результат, чем просто сказать, что дисперсия стремится к нулю [2]. И нам очень важно, что при больших T дисперсия ведет себя, как $\frac{1}{T}$. Более точный результат

для больших T говорит следующее: $\sqrt{T} \cdot r_k \overset{\text{as}}{\sim} N(0,1)$. При достаточно больших T 95-процентный доверительный интервал составляет ± 2 стандартных отклонения. Если мы хотим, например, проверить гипотезу $H_0: \rho_{10} = 0$ против обычной альтернативной гипотезы, надо посчитать r_{10} и посмотреть, попало ли оно в $\pm 2 \frac{1}{\sqrt{T}}$. Ес-

ли выборочное значение r_{10} попадает в этот интервал, то гипотезу H_0 не отвергаем на уровне значимости 5%, если выходим за эту границу, то отвергаем. Эта оценка может быть улучшена. Более точная асимптотическая оценка для дисперсии оценки r_k в предположении, что все $\rho_k = 0$ для $k > q$ дается формулой

$\text{var}(r_k) = \frac{1}{T}(1 + 2\rho_1^2 + \dots + 2\rho_q^2)$ для $k > q$. Гипотеза $H_0: \rho_k = 0$ для $k > q$ означает, что процесс есть $MA(q)$. Уточненная оценка означает, что дисперсия r_k асимптотически стремится не просто к $1/T$, а к этой величине с некоторым дополнительным множителем вида $(1 + 2\rho_1^2 + \dots + 2\rho_q^2)$. Этот теоретический результат используется для оценки дисперсий путем замены ρ на выборочное значение r . Для оценки дисперсии $\text{var}(r_1)$ по-прежнему используется $1/T$. Для оценки $\text{var}(r_2)$ используется $T^{-1}(1 + 2r_1^2)$. Для оценки $\text{var}(r_3)$ используется $T^{-1}(1 + 2r_1^2 + 2r_2^2)$. И так далее.

Если временной ряд порожден процессом $AR(p)$, то для $k > p$ оценки значений частной автокорреляционной функции $\hat{\phi}_{kk}$ имеют то же асимптотически нор-

мальное распределение: $\sqrt{T} \cdot \hat{\phi}_{kk} \overset{as}{\sim} N(0,1)$.

Теперь первый шаг подхода Бокса–Дженкинса заключается в следующем. Только учтите, что свойства всех оценок получены в предположении, что ε является белым шумом. Нормальность белого шума нам здесь не нужна, асимптотическая нормальность оценок обеспечивается за счет Центральной Предельной Теоремы. По реализации временного ряда рассчитываем оценки автокорреляционной и частной автокорреляционной функций, проверяем стационарность, при необходимости переходим к ряду первых разностей.

Специализированные компьютерные программы сегодня устроены следующим образом. Вы говорите: «Хочу исследовать ряд, построить статистику». Программа выдает соответствующие статистики, вы смотрите, они вам не нравятся. Вы, ничего не меняя, говорите: сделай то же самое для ряда разностей. Там это встроено, вам не надо вручную это программировать. Программа строит статистики для первых разностей, вторых. А ваше дело — пока визуально смотреть и решать, достаточно брать конечные разности или нет. Это первый шаг. После выбора стационарного ряда, вы смотрите, с какого номера начинается убывание по абсолютной величине выборочных автокорреляционной и частной автокорреляционной функций. И, исходя из этого, делаете предположение о возможных значениях параметров p и q . Далее можно переходить ко второму этапу: процедуре оценки коэффициентов.

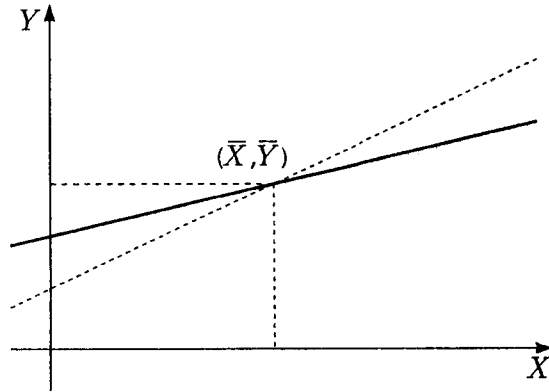


Рис. 2.4

при увеличении $\hat{b}$ (повороте прямой вокруг точки $(\bar{X}, \bar{Y})$ против часовой стрелки) величина $\hat{a}$ уменьшается.

2.5. Статистические свойства МНК-оценок параметров регрессии. Проверка гипотезы $b = b_0$. Доверительные интервалы для коэффициентов регрессии

Пусть выполняется условие нормальной линейной регрессионной модели $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$, т. е. ϵ — многомерная нормально распределенная случайная величина, или, что то же самое, Y_t имеют совместное нормальное распределение. Тогда МНК-оценки коэффициентов регрессии $\hat{a}$, $\hat{b}$ также имеют совместное нормальное распределение, так как они являются линейными функциями (2.4а), (2.4б) от Y_t :

$$\hat{a} \sim N\left(a, \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2}\right), \quad \hat{b} \sim N\left(b, \sigma^2 \frac{1}{\sum x_t^2}\right). \quad (2.17)$$

Если гипотеза нормальности ошибок не выполняется, то (2.17), вообще говоря, неверно, однако при некоторых условиях регуля-

ности на поведение X_t при росте n оценки $\hat{a}$, $\hat{b}$ имеют асимптотически нормальное распределение, т. е. (2.17) выполняется асимптотически при $n \rightarrow \infty$.

Распределение оценки дисперсии ошибок s^2

Покажем, что в случае нормальной линейной регрессионной модели, т. е. когда ϵ — многомерная нормально распределенная случайная величина, выполняется

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2).$$

Используя представление $\hat{b}$ в виде (2.9), получаем

$$\hat{b} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = b + \sum w_t \epsilon_t. \quad (2.18)$$

Подставив (2.18) в уравнение регрессии $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$, получим следующую формулу для остатков регрессии:

$$\begin{aligned} e_t &= Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{a} - \hat{b}X_t = a + bX_t + \epsilon_t - (\bar{Y} - \hat{b}\bar{X}) - \hat{b}X_t \\ &= a + bX_t + \epsilon_t - a - b\bar{X} - \bar{\epsilon} + b\bar{X} + \bar{X} \sum w_s \epsilon_s - bX_t \\ &= \epsilon_t - \bar{\epsilon} - X_t \sum w_s \epsilon_s = \epsilon_t - \bar{\epsilon} - x_t \sum w_s \epsilon_s. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Представим (2.19) в векторной форме:

$$e = \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}' - \mathbf{x}_* \mathbf{w}' \right) \epsilon = A \epsilon; \quad (2.20)$$

здесь $\mathbf{1}$ — $n \times 1$ вектор-столбец, состоящий из одних единиц, $e = (e_1, \dots, e_n)'$, $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)'$, A — $n \times n$ матрица и $\mathbf{x}_* = (x_1, \dots, x_n)'$ — вектор отклонений от среднего значения.

Далее воспользуемся свойством N8 (приложение МС, п. 4). Проверим, что матрица $A = I - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}' - \mathbf{x}_* \mathbf{w}'$ из (2.20) является идемпотентной: $A' = A$, так как $(\mathbf{w}\mathbf{w}')' = \mathbf{w}\mathbf{w}' = \mathbf{w}\mathbf{w}'$, и

$$(\mathbf{x}_* \mathbf{w}')' = \left(\frac{\mathbf{x}_* \mathbf{x}_*'}{\sum x_t^2} \right)' = \frac{(\mathbf{x}_* \mathbf{x}_*')'}{\sum x_t^2} = \frac{\mathbf{x}_* \mathbf{x}_*'}{\sum x_t^2} = \mathbf{x}_* \mathbf{w}'.$$

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{u}' - \mathbf{x}_* \mathbf{w}' \right)^2 \\
&= I + \frac{1}{n^2} \mathbf{u}' \mathbf{u}' + \mathbf{x}_* \mathbf{w}' \mathbf{x}_* \mathbf{w}' - \frac{2}{n} \mathbf{u}' - 2 \mathbf{x}_* \mathbf{w}' + \frac{1}{n} \mathbf{u}' \mathbf{x}_* \mathbf{w}' + \frac{1}{n} \mathbf{x}_* \mathbf{w}' \mathbf{u}' \\
&= I - \frac{1}{n} \mathbf{u}' + \mathbf{x}_* \mathbf{w}' - 2 \mathbf{x}_* \mathbf{w}' = I - \frac{1}{n} \mathbf{u}' - \mathbf{x}_* \mathbf{w}' = A,
\end{aligned}$$

так как $\mathbf{u}' \mathbf{u} = n$, $\mathbf{u}' \mathbf{x}_* = \mathbf{w}' \mathbf{u} = 0$ (см. (2.10)).

По условиям классической нормальной регрессионной модели $\varepsilon/\sigma \sim N(0, I_n)$, таким образом, в силу свойства N8 (приложение МС, п. 4):

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum e_t^2 = \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right)' A \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) \sim \chi^2(n-2), \quad (2.21)$$

что и требовалось доказать.

Независимость s^2 и МНК-оценок $\hat{a}$, $\hat{b}$

Так как оценка дисперсии ошибок s^2 является функцией от остатков регрессии e_t , то для того чтобы доказать независимость s^2 и $(\hat{a}, \hat{b})$, достаточно доказать независимость e_t и $(\hat{a}, \hat{b})$. Оценки $\hat{a}$, $\hat{b}$ так же, как и остатки регрессии e_t , являются линейными функциями ошибок ε_t (см. (2.4а), (2.4б), (2.20)) и поэтому имеют совместное нормальное распределение. Известно (приложение МС, п. 4, N4), что два случайных вектора, имеющие совместное нормальное распределение, независимы тогда и только тогда, когда они некоррелированы. Таким образом, чтобы доказать независимость s^2 и $(\hat{a}, \hat{b})$, нам достаточно доказать некоррелированность e_t и $(\hat{a}, \hat{b})$.

Обозначим $\xi = \sum w_t \varepsilon_t$, тогда из (2.19) $e_t = \varepsilon_t - \bar{\varepsilon} - x_t \xi$, а из (2.18) следует, что $\hat{b} = b + \xi$.

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(e_t, \hat{b}) &= \text{Cov}(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon} - x_t \xi, b + \xi) = E(\varepsilon_t \xi - \bar{\varepsilon} \xi - x_t \xi^2) \\
&= \sigma^2 \left(w_t - \frac{1}{n} \sum w_s - x_t \sum w_s^2 \right) \\
&= \sigma^2 \left(w_t - x_t \frac{1}{\sum x_s^2} \right) = 0.
\end{aligned} \quad (2.22)$$

Таким образом, e_t и $\hat{b}$ независимы при всех t , что и требовалось показать.

Упражнение. Используя аналогичные выкладки, показать независимость e_t и $\hat{a}$.

Проверка гипотезы $b = b_0$

Из (2.17) имеем $\hat{b} - b \sim N(0, \sigma_b^2)$, где $\sigma_b^2 = \sigma^2 / \sum x_t^2$. Оценка дисперсии оценки $\hat{b}$ может быть получена по формуле $\hat{V}(\hat{b}) = s_b^2 = \frac{s^2}{\sum x_t^2}$. Таким образом, $\frac{\hat{b} - b}{\sigma_b} \sim N(0, 1)$, а из (2.21) следует, что

$$\frac{s}{\sigma} \sim \sqrt{\frac{1}{n-2} \chi^2(n-2)},$$

т. е. по определению статистики Стьюдента (приложение МС, п. 3) имеем

$$t = \frac{(\hat{b} - b)/\sigma_b}{s/\sigma} \sim t(n-2),$$

и, так как $\frac{\sigma_b}{\sigma} = \frac{s_b}{s}$, получаем

$$t = \frac{\hat{b} - b}{s_b} \sim t(n-2). \quad (2.23)$$

Упражнение. Используя аналогичные выкладки, покажите, что

$$t = \frac{\hat{a} - a}{s_a} \sim t(n-2). \quad (2.24)$$

Итак, мы показали, что в случае нормально распределенных ошибок величина (2.23) распределена по закону Стьюдента. Заметим, что при определенных условиях регулярности на x_t соотношения (2.23) и (2.24) справедливы асимптотически и без предположения о нормальности ошибок регрессии.

Статистику (2.23) можно использовать для проверки гипотезы $H_0: b = b_0$ против альтернативной гипотезы $H_1: b \neq b_0$. Предположим, что верна гипотеза H_0 , тогда

$$t = \frac{\hat{b} - b_0}{s_b} \sim t(n-2).$$

Зададимся, например, 2.5%-ной точкой t -распределения с $(n - 2)$ степенями свободы $t_{0.025}$ (при 40 степенях свободы $t_{0.025} = 2.021$), т. е.

$$P\{-t_{0.025} < t < t_{0.025}\} = 0.95.$$

Мы отвергаем гипотезу H_0 (и принимаем H_1) на 5%-ном уровне значимости, если $|t| > t_{0.025}$ («редкое» событие с точки зрения гипотезы H_0), в противном случае мы не можем отвергнуть H_0 (и принимаем H_0).

При тестировании нулевой гипотезы $H_0: b = b_0$ против двусторонней альтернативной гипотезы $H_1: b \neq b_0$ на доверительном уровне α нулевая гипотеза отвергается при $|t| > t_{\alpha/2}(n - 2)$. Соответственно, при тестировании гипотезы H_0 против односторонней альтернативы $H_1: b > b_0$, нулевая гипотеза отвергается при $t > t_{\alpha}(n - 2)$. (Здесь $t_{\alpha}(n)$ означает 100 α %-ную точку распределения Стьюдента с n степенями свободы.)

Разрешив неравенство в $P\{|\hat{b} - b|/s_{\hat{b}} < t_{0.025}\} = 0.95$ относительно b , получим

$$P\{\hat{b} - t_{0.025}s_{\hat{b}} < b < \hat{b} + t_{0.025}s_{\hat{b}}\} = 0.95,$$

т. е. $[\hat{b} - t_{0.025}s_{\hat{b}}, \hat{b} + t_{0.025}s_{\hat{b}}]$ — 95%-ный *доверительный интервал* для b . Доверительный интервал накрывает истинное значение параметра b с заданной вероятностью (в данном случае 95%). Соответственно, двусторонний 100(1 - α)%-ный доверительный интервал для параметра b имеет следующий вид:

$$[\hat{b} - t_{\alpha/2}(n - 2)s_{\hat{b}}, \hat{b} + t_{\alpha/2}(n - 2)s_{\hat{b}}].$$

Наиболее просто выглядит t -статистика при гипотезе $H_0: b = 0$, а именно, $t = \hat{b}/s_{\hat{b}}$. Это значение и приводится всеми компьютерными пакетами в результатах регрессии. Значение $|t| > t_{0.025}$ ($t_{0.025} \approx 2$ для больших n) позволяет сделать вывод об отличии от нуля (на соответствующем уровне значимости) коэффициента регрессии и, следовательно, о наличии влияния (связи) X на Y . Малые значения t -статистики соответствуют отсутствию достоверной статистической связи объясняющей переменной X и зависимой переменной Y .

Компьютерные пакеты приводят также двусторонние P -значения t -статистики, т. е. вероятность того, что случайная величина,

распределенная по закону $t(n - 2)$, принимает значение по абсолютной величине большее, чем $|t| = \left| \frac{\hat{b}}{s_{\hat{b}}} \right|$.

2.6. Анализ вариации зависимой переменной в регрессии.

Коэффициент детерминации R^2

Анализ вариации зависимой переменной в регрессии

Рассмотрим вариацию (разброс) $\sum(Y_t - \bar{Y})^2$ значений Y_t вокруг среднего значения. Разобьем эту вариацию на две части: объясненную регрессионным уравнением и не объясненную (т. е. связанную с ошибками ϵ_t).

Обозначим через $\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$ предсказанное значение Y_t , тогда $Y_t - \bar{Y} = (Y_t - \hat{Y}_t) + (\hat{Y}_t - \bar{Y})$ (см. рис. 2.5) и вариация Y_t представляется в виде трех слагаемых:

$$\sum(Y_t - \bar{Y})^2 = \sum(Y_t - \hat{Y}_t)^2 + \sum(\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 + 2 \sum(Y_t - \hat{Y}_t)(\hat{Y}_t - \bar{Y}). \quad (2.25)$$

Третье слагаемое в (2.25) равно нулю, так как $y - \hat{y} = e$, — вектор остатков регрессии, ортогонален константе $\mathbf{1}$ и вектору $\mathbf{x}$ (см. (2.7)). В самом деле, $\sum e_t(\hat{Y}_t - \bar{Y}) = \sum e_t(\hat{a} + \hat{b}X_t - \bar{Y}) = (\hat{a} + \hat{b}\bar{X} - \bar{Y}) \sum e_t + \hat{b} \sum e_t x_t = 0$. Поэтому верно равенство

$$\sum_{\text{TSS}} (Y_t - \bar{Y})^2 = \sum_{\text{ESS}} (Y_t - \hat{Y}_t)^2 + \sum_{\text{RSS}} (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2. \quad (2.26)$$

Замечание. Вектор остатков регрессии ортогонален константе, т. е. $\mathbf{1}'\mathbf{e} = \sum e_t = 0$, вообще говоря, *только* в том случае, когда константа *включена* в число объясняющих параметров регрессии. Поэтому (2.26) справедливо, вообще говоря, *только* в случае, когда константа *включена* в число объясняющих параметров регрессии.

Билет 16

Пусть у нас есть набор значений двух переменных $X_t, Y_t, t = 1, \dots, n$; можно отобразить пары (X_t, Y_t) точками на плоскости $X - Y$ (рис. 1)

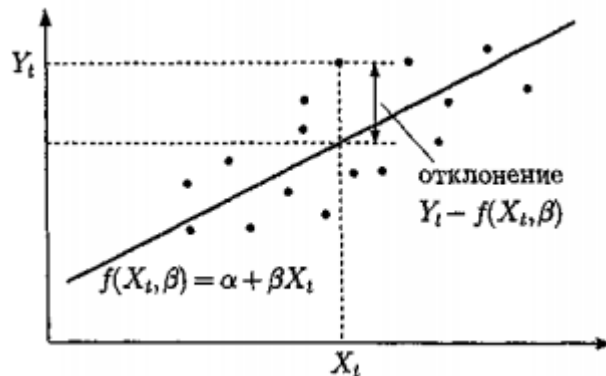


рис. 1

Предположим, что нашей задачей является подобрать («подогнать») функцию $Y = f(X)$ из параметрического семейства функций $f(X, \beta)$, «наилучшим образом описывающую зависимость Y от X ». Подобрать функцию в данном случае означает выбрать «наилучшее» значение параметра β . (Примером параметрического семейства может служить семейство линейных функций $f(X, \beta) = \alpha + \beta X$.)

Теперь добавим к постановке задачи некоторые статистические свойства данных.

Запишем уравнение зависимости Y_t от X_t в виде

$$Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

где X_t — неслучайная (детерминированная) величина, а Y_t, ε_t — случайные величины. Y_t называется объясняемой (зависимой) переменной, а X_t — объясняющей (независимой) переменной или *регрессором*. Уравнение, приведенное выше, также называется *регрессионным уравнением*. ε_t — это шум или ошибка, порождаемая упрощением модели от действительности и погрешности измерений. Отметим, что Y_t и ε_t имеют одинаковые функции распределения.

Основные гипотезы:

1. $Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$, — спецификация модели.
2. X_t — детерминированная величина; вектор $(X_1, \dots, X_n)'$ не коллинеарен вектору $i = (1, \dots, 1)'$.
- 3а. $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0, \quad \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ — не зависит от t .
- 3б. $\mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$, некоррелированность ошибок для разных наблюдений.

Часто добавляется условие:

3с. Ошибки $\varepsilon_t, t = 1, \dots, n$, имеют совместное нормальное распределение: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

В этом случае модель называется нормальной линейной регрессионной.

Итак, мы имеем набор наблюдений и модель 1-Заб. Задача оценить все три параметра модели: a, b, σ^2 . Существуют разные способы оценки, например, найти в классе линейных несмещенных оценок наилучшую в смысле минимальной дисперсии. Полученные оценки обозначаются как $\hat{a}, \hat{b}, s^2 = \hat{\sigma}^2$, а $\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$ – прогноз Y_t значения в точке X_t .

Пусть выполняется условие нормальной линейной регрессионной модели $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$, т.е. ε – многомерная нормально распределённая случайная величина, или, то же самое, Y_t имеют совместное нормальное распределение. Тогда МНК-оценки (метод наименьших квадратов) коэффициентов регрессии $\hat{a}, \hat{b}$ также имеют совместное нормальное распределение, так как являются линейными функциями от Y_t :

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \frac{n \sum X_t Y_t - (\sum X_t)(\sum Y_t)}{n \sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)}, \\ \hat{a} &= \frac{1}{n} \sum Y_t - \frac{1}{n} \sum X_t \hat{b} = \bar{Y} - \bar{X} \hat{b}, \\ \hat{a} &\sim N\left(a, \sigma^2 \sum X_t^2 / n \sum x_t^2\right), \quad \hat{b} \sim N\left(b, \sigma^2 / \sum x_t^2\right).\end{aligned}\tag{1}$$

где $x_t = X_t - \bar{X}, y_t = Y_t - \bar{Y}$ – отклонения от среднего.

Если гипотеза нормальности ошибок не выполняется, то (1), вообще говоря, неверно, однако при некоторых условиях регулярности на поведение X_t при росте n оценки $\hat{a}, \hat{b}$ имеют асимптотически нормальное распределение, т.е. (1) выполняется асимптотически при $n \rightarrow \infty$.

Проверка гипотезы $b = b_0$

Из (1) имеем $\hat{b} - b \sim N(0, \sigma_b^2)$, где $\sigma_b^2 = \sigma^2 / \sum x_t^2$ (если плохо видно, то здесь и далее индекс $\hat{b}$, а не b). Оценка дисперсии оценки $\hat{b}$ может быть получена по формуле $\hat{V}(\hat{b}) = s_b^2 = s^2 / \sum x_t^2$. Таким образом, $\hat{b} - b / \sigma_b \sim N(0, 1)$, а из $(n-2)s^2 / \sigma^2 \sim \chi^2(n-2)$,

следует, что

$$\frac{s}{\sigma} \sim \sqrt{\frac{1}{n-2} \chi^2(n-2)},$$

т.е. по определению статистики Стьюдента имеем

$$t = \frac{(\hat{b} - b) / \sigma_b}{s / \sigma} \sim t(n-2),$$

и, так как $\sigma_b / \sigma = s_b / s$, получаем

$$t = \frac{\hat{b} - b}{s_b} \sim t(n-2).\tag{2}$$

Аналогично

$$t = \frac{\hat{a} - a}{s_{\hat{a}}} \sim t(n - 2). \quad (3)$$

Таким образом (2) и (3) распределены по закону Стьюдента в случае нормально распределённых ошибок. Так же при определённых условиях регулярности на x_t соотношения (2) и (3) справедливы асимптотически и без предположения о нормальности ошибок регрессии.

Статистику (2) можно использовать для проверки гипотезы $H_0: b = b_0$ против альтернативной гипотезы $H_1: b \neq b_0$. Предположим, что верна гипотеза H_0 , тогда

$$t = \frac{\hat{b} - b_0}{s_{\hat{b}}} \sim t(n - 2)$$

Тогда гипотеза H_0 принимается при $|t| \leq t_c$, где t_c – точка t -распределения с $(n - 2)$ степенями свободы при уровне значимости α . Другими словами

$$\mathbb{P}\{\hat{b} - t_c s_{\hat{b}} < b < \hat{b} + t_c s_{\hat{b}}\} = 1 - \alpha,$$

а $100(1 - \alpha)\%$ -ый доверительный интервал для параметра b будет равен

$$[\hat{b} - t_c s_{\hat{b}}; \hat{b} + t_c s_{\hat{b}}].$$

Наиболее понятна t -статистика при $H_0: b = 0$, а именно $t = \hat{b}/s_{\hat{b}}$. В случае принятия этой гипотезы можно говорить об отсутствии достоверной статистической связи между объясняющей переменной X и зависимой переменной Y .

Коэффициент детерминации

Рассмотрим вариацию (разброс) $\sum(Y_t - \bar{Y})^2$ значений Y_t вокруг среднего значения. Разобьём эту вариацию на две части: объяснённую регрессионным уравнением и не объяснённую (т.е. связанную с ошибками ε_t).

Обозначим через $\hat{Y}_t = \hat{a} + \hat{b}X_t$ предсказанное значение Y_t тогда $Y_t - \bar{Y} = (Y_t - \hat{Y}_t) + (\hat{Y}_t - \bar{Y})$ (см. рис. 2) и вариация Y_t представляется в виде трёх слагаемых:

$$\sum(Y_t - \bar{Y})^2 = \sum(Y_t - \hat{Y}_t)^2 + \sum(\hat{Y}_t - \bar{Y})^2 + 2\sum(Y_t - \hat{Y}_t)(\hat{Y}_t - \bar{Y}). \quad (4)$$

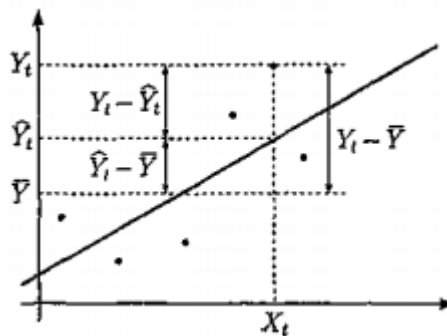


рис. 2

Третье слагаемое в (4) равно нулю, так как $y - \hat{y} = e$, вектор остатков регрессии, ортогонален константе i и вектору x . В самом деле $\sum e_t(\hat{Y}_t - \bar{Y}) = \sum e_t(\hat{a} + \hat{b}X_t - \bar{Y}) = (\hat{a} + \hat{b}\bar{X} - \bar{Y}) \sum e_t + \hat{b} \sum e_t x_t = 0$. Поэтому верно равенство

$$\underbrace{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}_{\text{TSS}} = \underbrace{\sum (Y_t - \hat{Y}_t)^2}_{\text{ESS}} + \underbrace{\sum (\hat{Y}_t - \bar{Y})^2}_{\text{RSS}} \quad (5)$$

Замечание. Вектор остатков регрессии ортогонален константе, т.е. $i'e = \sum e_t = 0$, вообще говоря, только в том случае, когда константа включена в число объясняющих параметров. Поэтому и (5) справедливо, вообще говоря, только в случае, когда константа включена в число объясняющих параметров регрессии.

TSS – вся дисперсия, ESS – не объяснённая часть дисперсии, RSS – объяснённая часть дисперсии.

Определение. Коэффициентом детерминации, или долей объяснённой дисперсии, называется

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = \frac{RSS}{TSS}. \quad (6)$$

Второе равенство в (6) верно лишь в том случае, если верно (5). Только в этом случае имеет смысл рассматривать статистику R^2 .

В силу определения R^2 принимает значения между 0 и 1, $0 \leq R^2 \leq 1$. Если $R^2 = 0$, то это означает, что регрессия ничего не даёт, т.е. X_t не улучшает качество предсказания $\hat{Y}_t$ по сравнению с тривиальным предсказанием $\hat{Y}_t = \bar{Y}$.

Другой крайний случай $R^2 = 1$ означает точную подгонку: все точки наблюдений лежат на регрессионной прямой (все $e_t = 0$).

Чем ближе значение R^2 к 1, тем лучше качество подгонки, $\hat{y}$ более точно аппроксимирует y .

3.3. Статистические свойства МНК-оценок

Оценка дисперсии ошибок σ^2 . Распределение s^2

Введем некоторые полезные в дальнейшем обозначения.

Вектор прогнозных значений

$$\hat{y} = X\hat{\beta} = X(X'X)^{-1}X'y = Ny, \quad N = X(X'X)^{-1}X'. \quad (3.10)$$

Вектор остатков регрессии

$$\begin{aligned} e &= y - \hat{y} = y - X\hat{\beta} = y - X(X'X)^{-1}X'y \\ &= (I - X(X'X)^{-1}X')y \\ &= (I - N)y = My, \quad M = I - N = I - X(X'X)^{-1}X'. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Непосредственно из определения нетрудно проверить, что матрицы M , N *идемпотентны*, т. е. симметричны и являются проекторами:

$$N^2 = N, \quad N' = N, \quad (3.12)$$

$$M^2 = M, \quad M' = M. \quad (3.13)$$

В соответствии с геометрической интерпретацией регрессии из (3.10), (3.11) вытекает, что матрица N является матрицей оператора ортогонального проектирования на подпространство π , порожденное векторами x_i , а M — матрицей оператора ортогонального проектирования на $\pi^\perp$ — ортогональное дополнение к подпространству π в R^n . Поэтому

$$NX = X, \quad MX = 0. \quad (3.14)$$

Вычислим математическое ожидание и матрицу ковариаций вектора остатков e :

$$\begin{aligned} E(e) &= E(My) = ME(y) = MX\beta \\ &= (I - X(X'X)^{-1}X')X\beta = X\beta - X\beta = 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$V(e) = V(My) = MV(y)M' = M\sigma^2IM' = \sigma^2M. \quad (3.16)$$

Сумма квадратов остатков $\sum e_i^2 = e'e$ является естественным кандидатом на оценку дисперсии ошибок σ^2 (конечно, с некоторым поправочным коэффициентом, зависящим от числа степеней свободы):

$$E(e'e) = \text{tr}(V(e)) = \sigma^2 \text{tr}(M) = \sigma^2 \text{tr}(I_n - N) = (n - k)\sigma^2. \quad (3.17)$$

При выводе (3.17) мы использовали (3.15), (3.16), свойства следа матрицы (приложение ЛА, п. 9), а также соотношение

$$\begin{aligned} \text{tr}(N) &= \text{tr}(X(X'X)^{-1}X') \\ &= \text{tr}(X'X(X'X)^{-1}) = \text{tr}(I_k) = k. \end{aligned} \quad (3.18)$$

При выводе последнего равенства используется свойство следа матрицы: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ (приложение ЛА, п. 9).

Из (3.17) следует, что

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n - k} = \frac{\sum e_i^2}{n - k} \quad (3.19)$$

является несмещенной оценкой дисперсии ошибок σ^2 , т. е. $Es^2 = \sigma^2$.

Так как из (3.14) следует, что

$$e = My = M(X\beta + \epsilon) = M\epsilon \quad (3.20)$$

и $\text{rank}(M) = \text{rank}(I - N) = \text{tr}(I - N) = n - k$ (ранг идемпотентной матрицы равен ее следу (приложение ЛА, п. 16)), то по лемме (приложение МС, п. 4, N8) распределение

$$\frac{e'e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - k) \quad \text{или} \quad (n - k) \frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - k). \quad (3.21)$$

3.4. Анализ вариации зависимой переменной в регрессии. Коэффициенты R^2 и скорректированный R_{adj}^2

Как и в случае регрессионной модели с одной независимой переменной, вариацию $\sum (y_t - \bar{y})^2$ можно разбить на две части: объясненную регрессионным уравнением и необъясненную (т.е. связанную с ошибками ϵ) — см. (2.25):

$$\begin{aligned} \sum (y_t - \bar{y})^2 &= \sum (y_t - \hat{y}_t)^2 \\ &+ \sum (\hat{y}_t - \bar{y})^2 + 2 \sum (y_t - \hat{y}_t)(\hat{y}_t - \bar{y}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

или в векторной форме:

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} - \bar{y}\mathbf{1})'(\mathbf{y} - \bar{y}\mathbf{1}) &= (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) + (\hat{\mathbf{y}} - \bar{y}\mathbf{1})'(\hat{\mathbf{y}} - \bar{y}\mathbf{1}) \\ &+ 2(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})'(\hat{\mathbf{y}} - \bar{y}\mathbf{1}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Третье слагаемое в (3.24) равно нулю в случае, если константа, т.е. вектор $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$, принадлежит линейной оболочке векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$. В самом деле,

$$(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})'(\hat{\mathbf{y}} - \bar{y}\mathbf{1}) = \mathbf{e}'(\mathbf{X}\hat{\beta} - \bar{y}\mathbf{1}) = \mathbf{e}'\mathbf{X}\hat{\beta} - \bar{y}\mathbf{e}'\mathbf{1} = 0,$$

т. к. в силу (3.5) $e'X = 0$ и $\bar{e} = e'z/n = 0$. Поэтому верно равенство

$$\|y - \bar{y}z\|_{\text{TSS}}^2 = \|y - \hat{y}\|_{\text{ESS}}^2 + \|\hat{y} - \bar{y}z\|_{\text{RSS}}^2. \quad (3.25)$$

Записывая (3.25) в отклонениях $y_* = y - \bar{y}z$; $\hat{y}_* = \hat{y} - \bar{y}z$; опять получим теорему Пифагора:

$$y'_*y_* = e'e + \hat{y}'_*\hat{y}_*. \quad (3.26)$$

Как и ранее в (2.27), определим коэффициент детерминации R^2 как

$$R^2 = 1 - \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} = 1 - \frac{e'e}{y'_*y_*} = \frac{\hat{y}'_*\hat{y}_*}{y'_*y_*} = \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}}. \quad (3.27)$$

Отметим, что коэффициент R^2 корректно определен только в том случае, если константа, т. е. вектор $z = (1, \dots, 1)'$, принадлежит линейной оболочке векторов $x_1, \dots, x_k$. В этом случае R^2 принимает значения из интервала $[0, 1]$.

Коэффициент R^2 показывает качество подгонки регрессионной модели к наблюдаемым значениям y_t .

Если $R^2 = 0$, то регрессия y на $x_1, \dots, x_k$ не улучшает качество предсказания y_t по сравнению с тривиальным предсказанием $\hat{y}_t = \bar{y}$.

Другой крайний случай $R^2 = 1$ означает точную подгонку: все $e_t = 0$, т. е. все точки наблюдений удовлетворяют уравнению регрессии.

В какой степени допустимо использовать критерий R^2 для выбора между несколькими регрессионными уравнениями? Следующие два замечания побуждают не полагаться *только* на значение R^2 .

1. R^2 , вообще говоря, возрастает при добавлении еще одного регрессора.
2. R^2 изменяется даже при простейшем преобразовании зависимой переменной (см. пример в конце раздела, стр. 76), поэтому сравнивать по значению R^2 можно только регрессии с одинаковыми зависимыми переменными.

Если взять число регрессоров равным числу наблюдений, всегда можно добиться того, что $R^2 = 1$, но это вовсе не будет означать наличие содержательной (имеющей экономический смысл) зависимости y от регрессоров.

Попыткой устранить эффект, связанный с ростом R^2 при возрастании числа регрессоров, является коррекция R^2 на число регрессоров. *Скорректированным (adjusted) R^2* называется

$$R_{\text{adj}}^2 = 1 - \frac{e'e/(n-k)}{y_*'y_*/(n-1)}. \quad (3.28)$$

Заметим, что нет никакого существенного оправдания именно такого способа коррекции.

Свойства скорректированного R^2 :

1. $R_{\text{adj}}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{(n-1)}{(n-k)}$.
2. $R^2 \geq R_{\text{adj}}^2$, $k > 1$.
3. $R_{\text{adj}}^2 \leq 1$, но может принимать значения < 0 .

В определенной степени использование скорректированного коэффициента детерминации R_{adj}^2 более корректно для сравнения регрессий при изменении количества регрессоров.

Например, рассмотрим две модели:

1. $y = X\beta + \varepsilon$.
2. $z = y - x_1 = X\gamma + \varepsilon$.

Строятся МНК-оценки параметров β и γ обеих моделей.

Для первой модели коэффициент детерминации R^2 равен

$$R_1^2 = 1 - \frac{e'e}{\sum (y_t - \bar{y})^2}, \quad e = My, \quad M = I - X(X'X)^{-1}X'. \quad (3.29)$$

Подсчитаем коэффициент детерминации R^2 для второй модели. Обозначим $\delta = (1, 0, \dots, 0)'$ — вектор-столбец; тогда $X\delta = x_1$. Матрица M одна и та же для обеих моделей, так как в них один и тот же набор регрессоров. Остатки во второй модели равны

$$\tilde{e} = Mz = M(y - X\delta) = My - MX\delta = My = e$$

(мы использовали (3.14)). Таким образом, остатки в обеих моделях совпадают.

$$R_2^2 = 1 - \frac{e'e}{\sum (z_t - \bar{z})^2}, \quad (3.30)$$

(3.29) и (3.30) отличаются только знаменателями $y_*'y_*$ и $z_*'z_*$.

$$z_*'z_* = (y_* - x_{1*})'(y_* - x_{1*}) = y_*'y_* - 2y_*'x_{1*} + x_{1*}'x_{1*}. \quad (3.31)$$

(Здесь $y_* = Ay$, $z_* = Az$, $x_{1*} = Ax_1$, где A — $n \times n$ матрица взятия отклонения от среднего, $A = I - \mathbf{1}\mathbf{1}'/n$). Из (3.31) видно, что коэффициенты детерминации, вообще говоря, не совпадают. Оценки коэффициентов двух регрессий связаны естественным соотношением:

$$\hat{\gamma} = (X'X)^{-1}X'z = (X'X)^{-1}X'(y - X\delta) = \hat{\beta} - \delta,$$

т.е. фактически обоим уравнениям соответствует одна и та же геометрическая картинка и экономически содержательная ситуация. Однако коэффициенты R^2 не совпадают только потому, что зависимость сформулирована в разных координатах.

Напоминаю, что такое множественная регрессия:

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \dots + \beta_k x_{kt}, t = 1, \dots, n$$

$$\text{Гипотеза } H_0: H\beta = r$$

$$\text{Пусть } H \in R^{q \times k}; \beta \in k \times 1; r \in q \times 1$$

$$\text{rank}(H) = q; q \leq k$$

Важные формулы:

(приложение ЛА, п. 10), находим оценку метода наименьших квадратов:

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y. \quad (3.4)$$

1. Покажем, что МНК-оценка (3.4) является несмещенной оценкой β :

$$\begin{aligned} E\hat{\beta}_{OLS} &= E((X'X)^{-1}X'y) = (X'X)^{-1}X'E(y) \\ &= (X'X)^{-1}X'E(X\beta + \epsilon) \\ &= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'E\epsilon = \beta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

2. Подсчитаем матрицу ковариаций МНК-оценки:

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}_{OLS}) &= V(Ay) = AV(y)A' = A\sigma^2 I A' \\ &= \sigma^2 (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

(здесь мы использовали симметричность матрицы $X'X$ и свойство матрицы ковариаций (МС.9)).

Далее проверка:

В качестве примера рассмотрим следующие матрицы H, r для $k = 3, q = 2$:

$$H\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = r.$$

Это условие соответствует системе двух линейных ограничений:

$$\begin{cases} \beta_1 = 2, \\ \beta_2 - \beta_3 = 0. \end{cases}$$

Из (3.4), (3.7), (3.8) видно, что вектор $\hat{\beta}_{OLS}$ имеет нормальное распределение со средним β и матрицей ковариаций $\sigma^2(X'X)^{-1}$.

$$\hat{\beta}_{OLS} \sim N(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1}).$$

Отсюда получаем, что $H\hat{\beta} - r \sim N(H\beta - r, \Sigma)$, где $\Sigma = q \times q$ матрица и $\Sigma = V(H\hat{\beta} - r) = V(H\hat{\beta}) = HV(\hat{\beta})H' = \sigma^2 H(X'X)^{-1}H'$. Итак,

$$H\hat{\beta} - r \sim N(H\beta - r, \sigma^2 H(X'X)^{-1}H'). \quad (3.37)$$

По лемме (приложение МС, п. 4, N9) из (3.37) при условии справедливости гипотезы $H_0: H\beta = r$, получаем:

$$\frac{1}{\sigma^2}(H\hat{\beta} - r)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta} - r) \sim \chi^2(q). \quad (3.38)$$

Из (3.21) и (3.38), используя независимость $\hat{\beta}$ и e , получаем:

$$F = \frac{(H\hat{\beta} - r)'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}(H\hat{\beta} - r)/q}{e'e/(n - k)} \sim F(q, n - k). \quad (3.39)$$

Если справедлива гипотеза $H_0: H\beta - r = 0$, то статистика F в (3.39) не должна принимать слишком больших значений, а именно, с вероятностью $1 - \alpha$ имеем $F < F_\alpha(q, n - k)$, где $F_\alpha(q, n - k)$ есть $100\alpha\%$ -ная точка распределения Фишера $F(q, n - k)$.

$$F = \frac{(\hat{\beta} - \beta)'H'(H(X'X)^{-1}H')^{-1}H(\hat{\beta} - \beta)/q}{e'e/(n - k)} \sim F(q, n - k). \quad (3.40)$$

Условие $F < F_\alpha(q, n - k)$ задает $100(1 - \alpha)\%$ -ную доверительную область для коэффициентов β .

Так как в числителе (3.40) стоит неотрицательно определенная квадратичная форма от β , то эта доверительная область является выпуклым множеством.

В случае $H = I$ статистика F в (3.40) выглядит следующим образом:

$$F = \frac{(\hat{\beta} - \beta)'(X'X)(\hat{\beta} - \beta)/k}{e'e/(n - k)} \sim F(k, n - k).$$

В этом случае доверительная область является эллипсоидом в k -мерном пространстве коэффициентов β .

Билет 19. Модели процессов авторегрессии и скользящего среднего: AR(p), MA(q) и ARMA(p,q). Условия стационарности этих процессов.

1 Временной ряд и стационарность.

Мы будем называть **временным рядом** (time series) совокупность наблюдений экономической величины в различные моменты времени. При этом наблюдение может характеризовать экономическую величину в данный момент времени, то есть быть типа запаса (например цена, ставка процента), или – характеризовать промежуток времени, то есть быть типа потока (например ВВП, продукция промышленности, поступления налогов). Как обычно в эконометрике, мы будем рассматривать временной ряд как выборку из последовательности случайных величин X_t , где t принимает целочисленные значения от 1 до T .

Строгая стационарность, или стационарность в узком смысле. Мы будем называть случайный процесс строго стационарным, если сдвиг во времени не меняет ни одну из функций плотности распределения. Это значит, что если ко всем моментам времени прибавить некоторую (целочисленную) величину, то сама функция плотности не изменится, $f_n(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = f_n(x_{t_1+\delta}, \dots, x_{t_n+\delta})$ для всех n , моментов времени $t_1, \dots, t_n$ и целочисленных δ .

Слабая стационарность, или стационарность в широком смысле. Если случайный процесс таков, что у него математическое ожидание и дисперсия существуют и не зависят от времени, а автокорреляционная (автоковариационная) функция зависит только от разности значений $(t_1 - t_2)$, то такой процесс мы назовем стационарным в широком смысле, или слабо стационарным.

Декомпозиция или теорема Вольда.

Мы только сформулируем этот результат и не будем его доказывать. Вольд доказал, что чисто недетерминированный стационарный в широком смысле случайный процесс может быть представлен в следующем виде:

$$X_t - \mu = \sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_{\tau} \cdot \varepsilon_{t-\tau},$$

где μ_t – математическое ожидание этого процесса, а ε_j – белый шум с конечными математическим ожиданием и дисперсией. То есть всякий слабо стационарный процесс представляется в виде линейной комбинации белых шумов, с разными весовыми коэффициентами.

2 AR

2.1 Определение

Авторегрессионная (AR-) модель – модель временных рядов, в которой значения временного ряда в данный момент линейно зависят от предыдущих

значений этого же ряда. Авторегрессионный процесс порядка p ($AR(p)$ -процесс) определяется следующим образом:

$$X_t = c + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} + \varepsilon_t,$$

где $a_1, \dots, a_p$ – параметры модели (коэффициенты авторегрессии), c – постоянная (часто для упрощения предполагается равной нулю), а ε_t – белый шум. Простейшим примером является авторегрессионный процесс первого порядка $AR(1)$ -процесс:

$$X_t = c + rX_{t-1} + \varepsilon_t$$

Для данного процесса коэффициент авторегрессии совпадает с коэффициентом автокорреляции первого порядка.

Другой простой процесс – процесс Юла – $AR(2)$ -процесс:

$$X_t = c + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

2.2 Операторное представление

Если ввести лаговый оператор $L : Lx_t = x_{t-1}$, то авторегрессионную модель можно представить следующим образом

$$X_t = c + \sum_{i=1}^p a_i L^i X_t + \varepsilon_t,$$

или

$$a(L)X_t = (1 - \sum_{i=1}^p a_i L^i)X_t = c + \varepsilon_t$$

Стационарность авторегрессионного процесса зависит от корней характеристического полинома $a(z) = 1 - \sum_{i=1}^p a_i z^i$. Для того чтобы процесс был стационарным, достаточно, чтобы все корни характеристического полинома лежали вне единичного круга в комплексной плоскости $|z| > 1$.

В частности, для $AR(1)$ -процесса $a(z) = 1 - rz$, следовательно корень этого «полинома» $z = 1/r$, поэтому условие стационарности можно записать в виде $|r| < 1$, то есть коэффициент авторегрессии (он же в данном случае коэффициент автокорреляции) должен быть строго меньше 1 по модулю.

Для $AR(2)$ -процесса можно показать, что условия стационарности имеют вид:

$$|a_2| < 1, a_2 \pm a_1 < 1.$$

Стационарные AR -процессы допускают разложение Вольда – представление в виде бесконечного MA -процесса:

$$X_t = a^{-1}(L)c + a^{-1}(L)\varepsilon_t = \frac{c}{1 - \sum_{i=1}^p a_i} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$$

Первое слагаемое представляет собой математическое ожидание AR -процесса. Если $c = 0$, то математическое ожидание процесса также равно нулю.

3 МА

3.1 Определение

Модель скользящего среднего q -го порядка $MA(q)$ – модель временного ряда вида:

$$X_t = \sum_{j=0}^q b_j \varepsilon_{t-j}$$

где ε_t – белый шум, b_j – параметры модели (b_0 можно считать равным 1 без ограничения общности).

Также в модель иногда добавляют константу. Тем не менее, поскольку чаще всего модели скользящего среднего используются для моделирования случайных ошибок временных рядов, то константу можно считать параметром основной модели.

Процесс белого шума формально можно считать процессом скользящего среднего нулевого порядка – $MA(0)$.

Чаще всего на практике используют процесс скользящего среднего первого порядка $MA(1)$:

$$X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$$

Согласно теореме Волда всякий «регулярный» стационарный процесс может быть представлен как некоторый процесс $MA(\infty)$ -процесс с некоторыми коэффициентами (сумма их модулей должна быть конечной). В частности отсюда следует, что любой регулярный стационарный процесс можно сколь угодно точно приблизить некоторым $MA(q)$ -процессом конечного порядка. Тем не менее такой способ иногда потребовал бы очень большого порядка модели. Сократить количество параметров модели позволяют модели $ARMA$, которые дополняют MA -модели авторегрессионной частью.

3.2 Операторное представление

С помощью лагового оператора L : $Lx_t = x_{t-1}$ данную модель можно записать следующим образом:

$$X_t = (1 + \sum_{j=1}^q b_j L^j) \varepsilon_t = b(L) \varepsilon_t$$

Если корни характеристического полинома $b(z)$ находятся вне единичного круга в комплексной плоскости (то есть по модулю строго больше единицы), то временной ряд является обратимым, то есть его можно представить как бесконечный авторегрессионный процесс:

$$b^{-1}(L)X_t = \varepsilon_t \Rightarrow X_t = c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

Для (1)-процесса условие обратимости означает, что коэффициент b по модулю строго меньше единицы.

4 ARMA

4.1 Определение

Модель авторегрессии – скользящего среднего – одна из математических моделей, использующихся для анализа и прогнозирования стационарных временных рядов в статистике. Модель ARMA обобщает две более простые модели временных рядов – модель авторегрессии (AR) и модель скользящего среднего (MA).

Моделью $ARMA(p, q)$, где p и q – целые числа, задающие порядок модели, называется следующий процесс генерации временного ряда $\{X_t\}$:

$$X_t = c + \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i},$$

где c – константа, $\{\varepsilon_t\}$ – белый шум, то есть последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин (как правило, нормальны), с нулевым средним, а $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ и $\beta_1, \dots, \beta_q$ – действительные числа, авторегрессионные коэффициенты и коэффициенты скользящего среднего, соответственно.

Такая модель может интерпретироваться как линейная модель множественной регрессии, в которой в качестве объясняющих переменных выступают прошлые значения самой зависимой переменной, а в качестве регрессионного остатка – скользящие средние из элементов белого шума. ARMA-процессы имеют более сложную структуру по сравнению со схожими по поведению AR- или MA-процессами в чистом виде, но при этом ARMA-процессы характеризуются меньшим количеством параметров, что является одним из их преимуществ.

4.2 Операторное представление. Стационарность и единичные корни

Если ввести в рассмотрение лаговый оператор L : $Lx_t = x_{t-1}$, тогда ARMA-модель можно записать следующим образом:

$$X_t = c + \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i L^i\right)X_t + \left(1 + \sum_{i=1}^q \beta_i L^i\right)\varepsilon_t$$

или, перенеся авторегрессионную часть в левую часть равенства:

$$(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i) X_t = c + (1 + \sum_{i=1}^q \beta_i L^i) \varepsilon_t$$

Введя сокращенные обозначения для полиномов левой и правой частей окончательно можно записать:

$$\alpha(L) X_t = c + \beta(L) \varepsilon_t$$

Для того, чтобы процесс был стационарным, необходимо, чтобы корни характеристического многочлена авторегрессионной части $\alpha(z)$ лежали вне единичного круга в комплексной плоскости (были по модулю строго больше единицы). Стационарный ARMA-процесс можно представить как бесконечный МА-процесс:

$$X_t = \alpha^{-1}(L) c + \alpha^{-1}(L) \beta(L) \varepsilon_t = \frac{c}{a(1)} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon_{t-i}$$

Например, процесс ARMA(1,0)=AR(1) можно представить как МА-процесс бесконечного порядка с коэффициентами убывающей геометрической прогрессии:

$$X_t = \frac{c}{1-a} + \sum_{i=0}^{\infty} a^i \varepsilon_{t-i}$$

Таким образом, ARMA-процессы можно считать МА-процессами бесконечного порядка с определенными ограничениями на структуру коэффициентов. Малым количеством параметров они позволяют описать процессы достаточно сложной структуры. Все стационарные процессы можно сколь угодно приблизить ARMA-моделью некоторого порядка с помощью существенно меньшего числа параметров, нежели только при использовании МА-моделей.

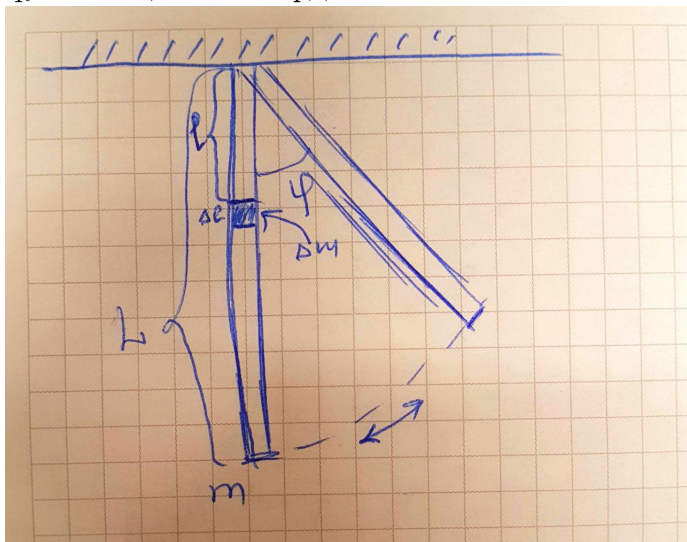
Билет 20

Напишите уравнение Лагранжа для массивного стержня длины L и массы m с закрепленным концом, колеблющегося в вертикальной плоскости, и оцените частоту его колебаний.

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \forall i = 1, \dots, N$$

где q_i – обобщенные координаты точек тела. Соответственно $L(q, \dot{q}, t)$ – ф-я Лагранжа.



Разобьем стержень на малые части массой Δm длиной Δl , $\Delta m = \rho S \Delta l$. Тогда каждую часть можно представить как математический маятник, и для него:

$$U = \Delta mgh = \Delta mgl(1 - \cos\varphi)$$

И соответственно ф-я Лагранжа:

$$\Delta L = \frac{\Delta m(l\dot{\varphi})^2}{2} - \Delta mgl(1 - \cos\varphi) = \rho S \Delta l \left(\frac{(l\dot{\varphi})^2}{2} - mgl(1 - \cos\varphi) \right)$$

Чтобы получить ф-ю Лагранжа для целого стержня, надо просуммировать ΔL по всем частям (т.е. проинтегрировать):

$$L = \int_0^l \rho S \left(\frac{(l\dot{\varphi})^2}{2} - mgl(1 - \cos\varphi) \right) dl = \rho S \left(\frac{L^3 \dot{\varphi}^2}{3 \cdot 2} - \frac{gL^2}{2}(1 - \cos\varphi) \right) = \frac{m(L\dot{\varphi})^2}{3 \cdot 2} - \frac{mgl}{2}(1 - \cos\varphi)$$

Подставляем это в уравнение Лагранжа, получаем:

$$m \frac{L^2}{3} \ddot{\varphi} = -mg \frac{L}{2} \sin\varphi$$

Отсюда ур-е колебания маятника:

$$\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2L} \sin\varphi = 0$$

Частота колебаний $\sqrt{\frac{3g}{2L}}$

21. Напишите функцию Лагранжа для замкнутой системы из N взаимодействующих материальных точек и выведите закон сохранения энергии из гипотезы однородности времени.

на тело и падающую воду, и поделить ее на ускорение свободного падения:

$$p = f/g.$$

Эту величину называют массой тела и обозначают буквой m . Динамический смысл этой величины следующий: m (численно) равно силе, которую нужно приложить к телу, чтобы за единицу времени изменить его скорость на единицу.

Подведем итог. Мы начали с анализа закона Аристотеля «наильственного» движения тел. Этот анализ привел нас к необходимости исследовать вопрос о выборе естественной системы отсчета. Мы убедились, что такой естественной системой отсчета в законе Аристотеля может являться лишь абсолютно неподвижная система отсчета. В связи с этим естественно возник вопрос, какими объективными свойствами должна обладать такая система отсчета, чтобы мы могли однозначно выделить ее из множества других возможных систем. Однако, как показал Галилей, существует множество систем отсчета таких, что наблюдатель, помещенный в такую систему, никакими экспериментами не сможет установить ее движения, несмотря на то что все эти системы могут двигаться относительно друг друга с постоянной скоростью. Это означает, что неподвижность есть состояние относительное, и поэтому вопрос о существовании абсолютно неподвижной системы лишен физического смысла. Существование галилеевых, или инерциальных, систем отсчета приводит к мысли, что законы движения могут быть выражены в форме, инвариантной относительно преобразования, связывающего пространство и время в одной системе отсчета с пространством и временем в другой системе, если они движутся с постоянной скоростью относительно друг друга. Для двух инерциальных систем отсчета, одна из которых движется относительно другой со скоростью U , Галилей указал эти преобразования в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \mathbf{U}t, \\ t' &= t, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где t' и $\mathbf{r}'$ — время и радиус-вектор точки в одной системе, а t и $\mathbf{r}$ — время и радиус-вектор той же точки в другой системе. Из

Эйнштейну, мы бы сказали, что она обладает большей степенью «внутреннего совершенства». Действительно, анализируя простейшие, но очень важные примеры движений, мы убедились, что закон (1.3) с единых позиций без нарушения внутренней логики и без дополнительных гипотез и предположений объясняет поведение движущихся тел в исследуемых примерах. Более того, использование (1.3) привело нас к «открытию» силы трения, убедительно продемонстрировало существование силы тяготения, избавило от тех натяжек, которые требовались Аристотелю при объяснении свободного движения тел, и привело к постановке важных экспериментов, проясняющих природу тяготения и физический смысл коэффициента p .

Итак, чувство внутренней гармонии, общности и простоты, убедительная согласованность выводов теории и опытных данных заставляют нас отказаться от (1.1) в пользу (1.3). С этого момента мы вступаем в мир идей классической механики — прямое порождение принципа относительности Галилея.

ГЛАВА 2

МЕХАНИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

§ 1

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ.

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Мы уже видели, что принцип относительности подсказывает нам, и опыт это подтверждает, что движение материальной точки может быть описано дифференциальным уравнением второго порядка относительно ее координат.

Рассмотрим теперь совокупность N материальных точек. Положение материальной точки в пространстве, как и прежде, будем определять ее радиус-вектором $\mathbf{r}$, компоненты которого совпадают с ее декартовыми координатами x, y, z . Производную $\dot{\mathbf{r}}$ по времени t

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

будем называть скоростью, а вторую производную $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ — ускорением точки. В дальнейшем, ради удобства, мы часто будем обозначать дифференцирование по времени точкой над буквой: $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$.

Чтобы определить положение системы N материальных точек в пространстве, надо задать N радиус-векторов, т. е. $3N$ координат. Число независимых величин, определяющих положение системы в пространстве, принято называть числом степеней свободы этой системы. Таким образом, число степеней свободы системы N материальных точек равно $3N$. В общем случае эти независимые величины могут и не быть декартовыми координатами, так как часто оказывается удобным ввести какие-либо другие координаты. В связи с этим любые n величин $q_1, \dots, q_n$, определяющие положение системы (с n степенями свободы), называют ее обобщенными координатами, а их производные по времени — обобщенными скоростями. С конкретными примерами обобщенных координат и скоростей мы еще встретимся в дальнейшем.

Соотношения, связывающие ускорения с координатами и скоростями, называются уравнениями движения. Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка по отношению к функциям $q_i(t)$ *:

$$F_k(q, \dot{q}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

Механическое состояние системы считается определенным в некоторый момент времени t' , если оно позволяет предсказать положение системы в последующие моменты времени. Для этого необходимо помимо задания координат в момент t' задать еще и все обобщенные скорости в этот момент времени. Опыт показывает, что это полностью определяет состояние системы и позволяет в принципе предсказать ее дальнейшее движение. Формально это означает, что с помощью соотношений (2.1) можно по значениям обобщенных координат и скоростей, заданным в некоторый момент времени t , определить в этот момент времени и значения обобщенных ускорений $\ddot{q}$. Отсюда следует, что соотношения (2.1), вообще говоря, разрешимы относительно $\ddot{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и могут быть представлены в виде

$$\Phi_i(q, \dot{q}, t)\ddot{q}_i + \Psi_i(q, \dot{q}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Чрезвычайно удобным и общим принципом, позволяющим получать уравнения движения в такой форме, является так называемый принцип наименьшего действия, или принцип Гамильтона.

Суть этого принципа заключается в следующем. Пусть в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ механическая система занимает положения $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$. Тогда из всех мыслимых траекторий, по которым система могла бы перейти из положения $q^{(1)}$ в положение $q^{(2)}$,

* Для краткости записи мы будем обозначать через $q, \dot{q}, \ddot{q}$ соответственно, совокупность всех координат, всех скоростей и всех ускорений.

в действительности реализуется траектория, доставляющая минимум интегралу

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (2.3)$$

Функция L , стоящая под знаком интеграла, называется функцией Лагранжа данной системы, а интеграл (2.3) — действием.

Вообще говоря, этот принцип может не выполняться для всей траектории в целом. Он может оказаться справедливым лишь для каждого из достаточно малых участков траектории, а для всей траектории может случиться, что интеграл (2.3) имеет лишь экстремальное, не обязательно минимальное значение. Однако при выводе уравнений движения используется лишь условие экстремальности.

Необходимым условием экстремальности интеграла (2.3), как известно*, является обращение в нуль его первой вариации

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0,$$

причем все n функций $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ должны варьироваться независимо. Составляющая вариации действия по i -й варьируемой функции будет:

$$(\delta S)_i = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0.$$

Замечая, что $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$, проинтегрируем второй член по частям и получим

$$(\delta S)_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0.$$

Первый член в этом соотношении исчезает, так как $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, и остается интеграл, который должен быть равен нулю при произвольных значениях δq_i . Это возможно только в том случае, если подынтегральное выражение тождественно обращается в нуль. Таким образом, мы имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Эта система дифференциальных уравнений в механике называется уравнениями Лагранжа (в вариационном исчислении подобные уравнения называют уравнениями Эйлера). Для того чтобы из

* См., например, Эльсгольд Л. Э. Вариационное исчисление. — М.: ГИТТЛ, 1958.

этих уравнений получить уравнения движений данной механической системы, необходимо построить функцию Лагранжа этой системы.

С формальной точки зрения уравнения (2.4) образуют систему n дифференциальных уравнений второго порядка для n неизвестных функций $q_i(t)$. Общее решение такой системы содержит $2n$ произвольных постоянных. Для их определения необходимо в некоторый момент времени t_0 , называемый начальным, знать значения всех координат и скоростей системы.

Установим некоторые общие свойства функции Лагранжа. Если две механические системы никак не взаимодействуют, то очевидно, что функция Лагранжа каждой из этих систем не будет содержать величин, относящихся к другой системе. Отсюда следует, что если рассматривать обе эти системы как одну систему, то ее функция Лагранжа будет представлять собой сумму функций Лагранжа исходных систем

$$L = L_1 + L_2. \quad (2.5)$$

Далее очевидно, что умножение функции Лагранжа механической системы на произвольную постоянную не отражается на уравнениях движения этой системы.

Наконец, рассмотрим две функции $L'(q, \dot{q}, t)$ и $L(q, \dot{q}, t)$, отличающихся друг от друга на полную производную по времени от какой-либо функции координат и времени $f(q, t)$:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t).$$

Соответствующие этим функциям интегралы (2.3) связаны соотношением

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(q, t) dt = \\ &= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1), \end{aligned}$$

т. е. отличаются на константу, исчезающую при варьировании действия (условие $\delta S' = 0$ совпадает с условием $\delta S = 0$), и вид уравнений движения сохраняется. Таким образом, функция Лагранжа определена лишь с точностью до слагаемого, представляющего собой полную производную от произвольной функции координат и времени.

Для дальнейшего изучения механических явлений и построения функции Лагранжа необходимо выбрать систему отсчета. Естественно при выборе руководствоваться принципом простоты и не навязывать пространству и времени в системе отсчета никаких априорных свойств, усложняющих их структуру. Наиболее простыми мыслимыми свойствами являются изотропность и однородность пространства и однородность времени. По отношению к свободной (т. е. не подвергающейся внешним воздействиям) материальной точке это будет означать, что в любом месте про-

странства такая точка, находясь в покое, будет пребывать в этом состоянии как угодно долго. Формально это будет означать, что функция Лагранжа свободной материальной точки не зависит от координат и времени, а также от направления вектора скорости, т. е. является функцией лишь модуля скорости:

$$L = L(v^2). \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в уравнения Лагранжа, найдем, что*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

откуда $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \text{const}$, а поскольку $L = L(v^2)$, то, следовательно,

$$\mathbf{v} = \text{const}. \quad (2.7)$$

Таким образом, в системе отсчета, в которой пространство изотропно и однородно, а время однородно, всякое свободное движение материальной точки происходит с постоянной по величине и направлению скоростью. Этим же свойством обладают, как мы видели раньше, и галилеевы, или инерциальные, системы. Более того, опыт показывает, что не только законы свободного движения будут одинаковыми в этих системах, но что они будут и во всех других механических отношениях полностью эквивалентны.

Итак, инерциальные системы отсчета — это такие системы, по отношению к которым пространство однородно и изотропно, а время однородно. Координаты $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ одной и той же точки в двух различных системах отсчета K и K' , из которых вторая движется относительно первой с постоянной скоростью $\mathbf{U}$, связаны, как показывает опыт (при умеренных скоростях U), друг с другом соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{U}t', \quad (2.8)$$

причем предполагается, что ход времени одинаков в обеих системах отсчета:

$$t = t'. \quad (2.9)$$

Предположение об абсолютности времени — основа представлений классической механики. Формулы (2.8), (2.9), как это уже указывалось ранее, называют преобразованием Галилея.

§ 2

ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Прежде чем построить функцию Лагранжа для системы материальных точек, рассмотрим сначала простейший случай — свободное движение материальной точки относительно

* Под производной скалярной величины по вектору мы будем подразумевать вектор, компоненты которого равны производным от этой величины по соответствующим компонентам вектора.

инерциальной системы отсчета. Мы уже видели, что в этом случае функция Лагранжа зависит лишь от квадрата модуля скорости. Для выяснения конкретного вида этой зависимости необходимо привлечь принцип относительности Галилея. Пусть инерциальная система отсчета K движется относительно инерциальной системы K' с некоторой скоростью U , т. е. $v' = v + U$. Так как уравнения движения в обеих системах отсчета должны иметь один и тот же вид, то функция Лагранжа $L(v^2)$ должна перейти при таком преобразовании в функцию L' , которая если и отличается от $L(v^2)$, то лишь на полную производную по времени от функции координат и времени. Имеем

$$L' = L(v'^2) = L[(v + U)^2].$$

Функцию, стоящую в правой части этого равенства, можно по формуле конечных приращений Лагранжа представить в виде

$$L[(v + U)^2] = L(v^2) + 2 \frac{dL(\xi)}{d\xi} \bigg|_{\xi = (v + U)^2} \cdot U,$$

где U^* в общем случае может зависеть от v .

Второй член в правой части равенства будет полной производной по времени только в том случае, когда $U^*(v)$ — линейная функция скорости v , а величина

$$\frac{dL(\xi)}{d\xi} = \text{const},$$

т. е. $\frac{dL(v^2)}{dv^2}$ не зависит от v^2 . Эти условия, очевидно, выполняются, если функция Лагранжа прямо пропорциональна квадрату скорости. Обозначая коэффициент пропорциональности через $m/2$, получаем окончательно

$$L = \frac{mv^2}{2}. \quad (2.10)$$

Величина m называется массой материальной точки. В силу свойства аддитивности функции Лагранжа, для системы невзаимодействующих точек имеем

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2}. \quad (2.11)$$

Из принципа наименьшего действия вытекает, что масса не может быть отрицательной. Действительно, пусть материальная точка перемещается из положения r_1 в положение r_2 . При этом действие

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{mv^2}{2} dt$$

должно принимать минимальное значение. Если бы масса была отрицательной, то на траекториях, по которым точка быстро уда-

ляется от r_1 , а затем быстро приближается к r_2 , действие могло бы принимать сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения, т. е. не имело бы минимума.

Рассмотрим теперь систему взаимодействующих материальных точек. Функция Лагранжа такой системы помимо скоростей будет зависеть также и от координат точек системы. Таким образом, для каждой отдельной точки системы пространство уже не будет однородным и изотропным, а время однородным. Однако если точки системы взаимодействуют только друг с другом (в таких случаях говорят, что система замкнута), то можно говорить об однородности и изотропности пространства и однородности времени относительно всей системы в целом.

Определение закона, по которому взаимодействуют те или иные материальные объекты, есть центральная проблема физики. В классической механике изучается класс взаимодействий, который может быть описан прибавлением к функции Лагранжа невзаимодействующих точек (2.11) определенной (зависящей от характера взаимодействия) функции координат. Таким образом, в классической механике взаимодействие материальных точек, составляющих механическую систему, полностью определяется их расположением в пространстве. Это вполне согласуется с опытными данными и с принципом относительности Галилея.

Обозначим вышеупомянутую функцию через $U_v(r_1, r_2, \dots, r_N)$. Тогда

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} - U_v(r_1, \dots, r_N). \quad (2.12)$$

Первое слагаемое в (2.12)

$$T = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2}$$

называют в механике кинетической энергией, а функцию U_v — потенциальной энергией системы.

Теперь мы можем составить уравнения движения замкнутой системы материальных точек:

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dv_a} - \frac{\partial L}{\partial r_a} = 0, \quad a = 1, 2, \dots, N,$$

или, подставляя сюда (2.12):

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = - \frac{\partial U_v}{\partial r_a}, \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (2.13)$$

Уравнения движения в такой форме называются уравнениями Ньютона. Вектор

$$F_a = - \frac{\partial U_v}{\partial r_a} \quad (2.14)$$

называется силой, действующей на a -ю материальную точку системы.

Рассмотрим теперь замкнутую систему C , представляющую собой объединение двух систем A и B , движение одной из которых задано (например B). Тогда система A , рассматриваемая отдельно, не будет замкнутой. Для того чтобы построить функцию Лагранжа системы A , выпишем функцию Лагранжа системы C :

$$L_C = \sum_{\alpha=1}^{n_0} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + \sum_{\beta=1}^{n_0} \frac{m_\beta v_\beta^2}{2} - U_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_0}; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n_0}),$$

где $\mathbf{r}_\alpha$ — радиус-векторы точек системы A , а $\mathbf{q}_\beta$ — радиус-векторы точек системы B , причем $\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha$, $\mathbf{v}_\beta = \dot{\mathbf{q}}_\beta$.

Теперь, очевидно, нужно в выражение для L_C подставить заданные функции времени $\mathbf{q}_\beta(t)$, отбросить член, представляющий кинетическую энергию системы B (так как он является явной функцией времени и поэтому может рассматриваться как полная производная от некоторой другой функции времени), и мы получим функцию Лагранжа системы A :

$$L_A = \sum_{\alpha=1}^{n_0} \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - U_n[\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_0}; \mathbf{p}_1(t), \dots, \mathbf{p}_{n_0}(t)].$$

Таким образом, движение системы во внешнем поле описывается функцией Лагранжа, по форме совпадающей с функцией Лагранжа замкнутой системы, но с тем отличием, что теперь потенциальная энергия системы может зависеть явно от времени.

§ 3 ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Свойства однородности и изотропности пространства и времени приводят к чрезвычайно важным понятиям, имеющим глубокий физический смысл. Каждому из этих свойств может быть поставлен в соответствие интеграл движения, представляющий собой закон сохранения некоторой величины, играющей в механике фундаментальную роль.

Начнем с закона сохранения, обусловленного однородностью времени. Однородность времени означает, что функция Лагранжа замкнутой системы не зависит явно от времени. Тогда полная производная функции Лагранжа по времени будет иметь вид

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \mathbf{v}_a + \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \dot{\mathbf{v}}_a. \quad (2.15)$$

Выразим из уравнений Лагранжа $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$ через $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}$ и подставим в (2.15). Получим

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{a=1}^N \mathbf{v}_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} + \sum_{a=1}^N \frac{dL}{d\mathbf{v}_a} \dot{\mathbf{v}}_a = \sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \mathbf{v}_a \right),$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{a=1}^N \mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} - L \right) = 0,$$

откуда

$$\sum_{a=1}^N \mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} - L = \text{const.} \quad (2.16)$$

Таким образом, величина

$$E = \sum_{a=1}^N \mathbf{v}_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} - L \quad (2.17)$$

остаётся неизменной при движении замкнутой системы. Эта величина называется энергией системы. Так как при выводе этого закона сохранения использовалось лишь отсутствие явной зависимости функции Лагранжа от времени, то очевидно, что для систем, помещённых в статическое внешнее поле, этот закон также имеет место. Механические системы, энергия которых сохраняется, называют консервативными.

Подставляя в (2.17) выражение функции Лагранжа для замкнутой системы материальных точек, получим следующее выражение для энергии:

$$E = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} + U_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (2.18)$$

Отсюда видно, что энергия системы представляет собой сумму кинетической энергии, зависящей от скоростей, и потенциальной энергии, зависящей только от координат точек системы.

Обратимся теперь к свойству однородности пространства. С этим свойством связан не менее важный закон сохранения. Однородность пространства относительно замкнутой механической системы означает неизменность свойств системы при любом ее параллельном переносе как целого:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a' + \mathbf{q}, \quad (2.19)$$

где $\mathbf{q}$ — некоторый постоянный вектор сдвига.

Формально это означает, что вид функции Лагранжа не изменится при подстановке (2.19).

Имеем

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) = L(\mathbf{r}_1' + \mathbf{q}, \dots, \mathbf{r}_N' + \mathbf{q}; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N).$$

В силу независимости L от $\mathbf{q}$ получаем следующее условие:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}} = \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0. \quad (2.20)$$

Билет 22

Покажите, что функция $(\frac{e^x/x^*}{x/x^*})^m (\frac{e^y/y^*}{y/y^*})^\alpha$ является первым интегралом для системы ОДУ Лотки-Вольтерра $\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$, $\frac{dy}{dt} = k\beta xy - my$, описывающей сосуществование хищников y и жертв x , где x^* , y^* - стационарное решение этой системы.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= f_1(t, x(t), y(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= f_2(t, x(t), y(t)).\end{aligned}\tag{1}$$

Определение 1.

Первым интегралом нормальной системы (1) называется функция $F(t, x(t), y(t)) \equiv C$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой интегральной кривой системы (1).

Утверждение 1.

Функция $F(t, x(t), y(t)) \equiv C$ является первым интегралом системы (1) тогда и только тогда, когда ее производная в силу системы (1) равна нулю:

$$\left. \frac{dF}{dt}(t, x(t), y(t)) \right|_{(1)} = 0.$$

Система хищник-жертва. Размножение жертв ограничивается давлением на них со стороны хищников. Размножение хищников ограничивается количеством добытой ими пищи (количеством жертв):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= k\beta xy - my.\end{aligned}\tag{2}$$

- $x(t)$ - численность жертв;
- $y(t)$ - численность хищников;
- α - коэффициент естественного прироста жертв;
- m - коэффициент естественной смертности хищников;
- $V(x) = \beta x$ - количество (биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, причем k -я часть полученной биомассы энергии расходуется хищником на воспроизводство, остальное тратится на поддержание основного обмена и охотничьей активности. Функцию $V(x)$ обычно называют трофической функцией или функциональным откликом хищника на плотность популяции жертвы.

$x^* = \frac{m}{k\beta}$, $y^* = \alpha/\beta$ - стационарное решение системы (2) (проверяется подстановкой). Докажем, что функция $(\frac{e^X}{X})^m (\frac{e^Y}{Y})^\alpha$, где $X = x/x^*$, $Y = y/y^*$ является первым интегралом системы (2). Продифференцируем эту функцию по t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[(\frac{e^X}{X})^m (\frac{e^Y}{Y})^\alpha] &= m(\frac{e^X}{X})^{m-1} \cdot \frac{e^X \dot{X} X - e^X \dot{X}}{X^2} \cdot (\frac{e^Y}{Y})^\alpha + \alpha(\frac{e^Y}{Y})^{\alpha-1} \cdot \frac{e^Y \dot{Y} Y - e^Y \dot{Y}}{Y^2} \cdot (\frac{e^X}{X})^m = \\ &= (\frac{e^X}{X})^m \cdot (\frac{e^Y}{Y})^\alpha \cdot [m\dot{X}(1 - \frac{1}{X}) + \alpha\dot{Y}(1 - \frac{1}{Y})] = \underbrace{(\frac{e^X}{X})^m \cdot (\frac{e^Y}{Y})^\alpha}_A \cdot [m\dot{X} + \alpha\dot{Y} - (m\frac{\dot{X}}{X} + \alpha\frac{\dot{Y}}{Y})] = \\ &= \left\{ X = x/x^*, Y = y/y^*, x^* = \frac{m}{k\beta}, y^* = \alpha/\beta \right\} = A \cdot [\dot{x}k\beta - \dot{y}\beta - (m\frac{\dot{x}}{x} + \alpha\frac{\dot{y}}{y})] = \left\{ (2) \right\} = \\ &= A \cdot [k\beta(\alpha x - \beta xy) + \beta(k\beta xy - my) - (\alpha m - \beta my + \alpha k\beta x - \alpha m)] = \\ &= A \cdot [k\beta\alpha x - \beta my - (-\beta my + \alpha k\beta x)] = 0. \end{aligned}$$

Из утверждения 1 следует, что функция $(\frac{e^X}{X})^m (\frac{e^Y}{Y})^\alpha$ является первым интегралом системы (2). Уравнение $(\frac{e^X}{X})^m (\frac{e^Y}{Y})^\alpha = C$ описывает семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых, соответствующих фазовым траекториям периодических решений системы (2). Заметим, что при увеличении C амплитуды колебаний x и y возрастают (рисунок 1).

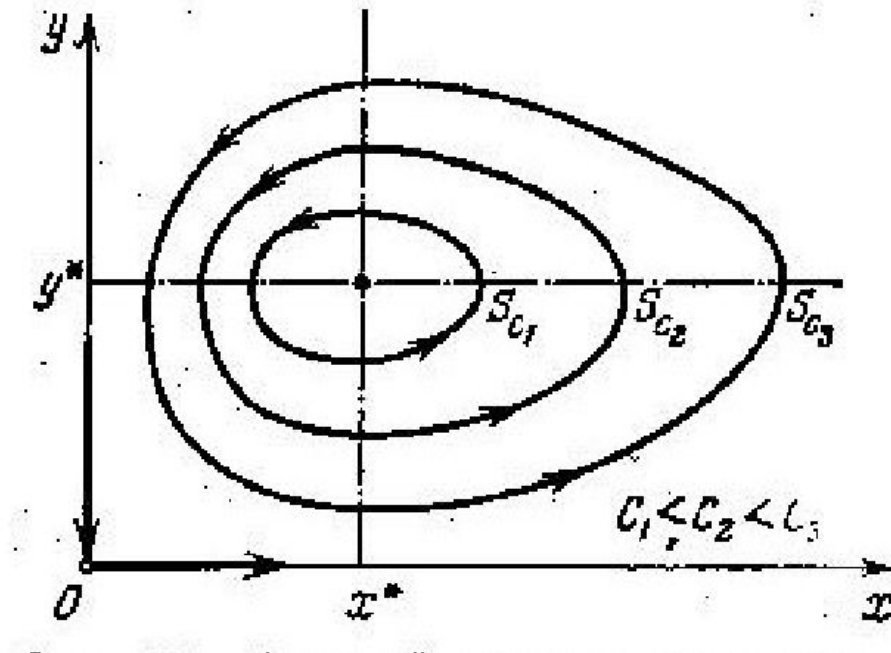


Рис. 1. Фазовый портрет

Билет 23

Пусть ЛПР (лицо, принимающее решение) может принять одно из двух $S = 1, 2$ альтернативных решений. Вероятность того, что i -ый индивид, $i = \overline{1, N}$, примет решение с номером $s = 1$ равно $p_i \in [0, 1]$, а с номером $s = 2$ равно $1 - p_i$.

Пусть μ_i есть коэффициент индивидуализма (самостоятельности) i -ого ЛПР. При $\mu = 1$ данное ЛПР абсолютно самостоятельно и его нельзя заставить изменить решение, а при $\mu = 0$ – это абсолютный конформист (флюгер), меняющий решения в угоду любому чужому мнению. Пусть $\lambda_{ij} \in [0, 1]$ – вероятность того, что i -е ЛПР примет решение $s = 1$ после общения с j -м ЛПР, при условии, что j -е ЛПР придерживается $s = 1$ -й альтернативы. Тогда для полного конформиста ($\mu = 0$) вероятность того, что после общения с коллективом им будет принято первое решение по формуле полной вероятности запишется как

$$p_i^0 = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} p_j.$$

Очевидно, что $\lambda_{ii} = 0$, т.к. собственное мнение для конформиста не имеет веса, и, если все $p_j = 1, j \neq i$, то $p_i^0 = 1$ (коллектив всегда убедит конформиста принять мнение «общества»). Следовательно

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{ij} = 1, i = \overline{1, N}.$$

Если же i -е ЛПР самостоятельно принимает решения ($\mu = 1$), то соответствующая вероятность будет равна априорной вероятности α_i . Для промежуточных значений $\mu \in (0, 1)$ имеет смысл вычислять вероятность в виде выпуклой комбинации

$$p_i = \mu_i \alpha_i + (1 - \mu_i) p_i^0 = \mu_i \alpha_i(s) + (1 - \mu_i) \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} p_j.$$

Рассмотрим динамическую модель, в которой априорное решение на данном шаге равно апостериорному на предыдущем шаге. Она примет вид системы линейных разностных уравнений

$$p_i(k+1) = \mu_i p_i(k) + (1 - \mu_i) \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} p_j(k+1), i = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Здесь $k = 0, 1, 2, \dots$ – дискретное время, параметры

$$\mu_i \in [0, 1], \lambda_{ij} > 0, i \neq j, \lambda_{ii} = 0, \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} = 1. \quad (2)$$

Требуется найти функции $p_i(k)$, при заданных условиях $p_i(0), i = \overline{1, N}$.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)^T, \Lambda = (\lambda_{ij}), i, j = \overline{1, N}, M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N), \mu_1 + \dots + \mu_N > 0$,

диагональная матрица, E – единичная матрица. Тогда систему (1) можно записать в векторном виде

$$(E - A)\mathbf{p}(k + 1) = M\mathbf{p}(k), \text{ где} \quad (3)$$

$$A = (E - M)\Lambda. \quad (4)$$

Определение 1. Квадратная матрица $A(N \times N)$ называется разложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов её можно представить в виде $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$, где $A_1(m \times m)$, $A_3((N - m) \times (N - m))$, $m < N$.

Предложение 1. Если матрица A разложима, то и матрица A^2 разложима причём

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_1^2 & \tilde{A}_2 \\ 0 & A_3^2 \end{bmatrix}$$

Доказательство следует из определения 1.

Предложение 2. Если все $\mu_i < 1$, то матрица (4) неразложима.

Пусть $a_{ij}^{(2)}$ произвольный элемент матрицы A^2 , стоящий на пересечении i -й строки и j -ого столбца. Из (4) следует, что $a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^N (1 - \mu_i) \lambda_{ik} (1 - \mu_k) \lambda_{kj}$. Из (2) и условия предложения следует, что $a_{ij}^{(2)} > 0$. Отсюда и из предложения 1 получаем справедливость утверждения ■

Теорема (Фробениуса-Перрона). (без доказательства) Если неотрицательная матрица A неразложима, то у неё существует собственное число λ_A такое, что для любого другого собственного числа λ справедливо $|\lambda| < \lambda_A$, а соответствующий правый собственный вектор-столбец $\mathbf{x}_A$, $(A\mathbf{x}_A = \lambda_A \mathbf{x}_A)$, и левый собственный вектор-строка $\mathbf{y}_A$, $(\mathbf{y}_A A = \lambda_A \mathbf{y}_A)$, положительны.

Определение 2. Собственное число λ_A называют фробениусовым числом, а векторы $\mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A$ – правым и левым фробениусовыми векторами.

Пусть $r = \min_{i=1, N} r_i, R = \max_{i=1, N} r_i$, где $r_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$.

Предложение 3. Если A неотрицательная неразложимая матрица, то при $r < R$ её фробениусово число $r < \lambda_A < R$. Если же $r = R$, то $\lambda_A = R$.

Пусть вектор $\mathbf{y}_A$ таков, что $\sum_{i=1}^N y_A^i = 1$. Умножим равенство $\mathbf{y}_A A = \lambda_A \mathbf{y}_A$ справа на вектор-столбец $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$. Получим $\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} y_A^i = \lambda_A \sum_{i=1}^N y_A^i = \lambda_A$. Поменяв в левой части равенства порядок суммирования, имеем $\lambda_A = \sum_{j=1}^N y_A^i \sum_{i=1}^N a_{ij} = \sum_{i=1}^N y_A^i r_i \begin{cases} < R \\ > r \end{cases}$. Строгие неравенства следуют из того, что вектор $\mathbf{y}_A$ положителен и $r < R$. Если же $r = R$, то $\lambda_A = R$ ■

Определение 3. Неотрицательную матрицу A назовём продуктивной, если существует неотрицательная матрица $(E - A)^{-1}$.

Предложение 4. Неотрицательная неразложимая матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда её фробениусово число $\lambda_A < 1$.

Достаточность. Пусть $\lambda_A < 1$. Если $\mathbf{x}_A$ правый фробениусов вектор, то $A\mathbf{x}_A = \lambda_A \mathbf{x}_A$. Отсюда и их положительности компонент вектора $\mathbf{x}_A$ следует, что $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Из тождества $E - A^k = (E - A)(E + A + A^2 + \dots + A^{k-1})$ заключаем, что $E = \lim_{k \rightarrow \infty} (E - A^k) = (E - A) \lim_{k \rightarrow \infty} (E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) = (E - A)C$. Последний предел существует, так как существует предел слева. Отсюда следует, что $(E + A + A^2 + \dots)$ неотрицательна и равна $(E - A)^{-1}$.

Необходимость. Пусть матрица $(E - A)^{-1} \geq 0$. Для вектора $\mathbf{p} > 0$ решение $(E - A)\mathbf{x} = \mathbf{p}$ существует и $\mathbf{x} = (E - A)^{-1}\mathbf{p} > 0$. Очевидны соотношения $\lambda_A \mathbf{y}_A \mathbf{x} = \mathbf{y}_A A \mathbf{x} = \mathbf{y}_A (\mathbf{x} - \mathbf{p}) < \mathbf{y}_A \mathbf{x}$. Отсюда и из положительности числа $\mathbf{y}_A \mathbf{x}$ следует неравенство $\lambda_A < 1$ ■

Предложение 5. Если $\sum_{i=1}^N \mu_i > 0$, то фробениусово число матрицы (4) меньше единицы.

Сумма элементов i -й строки матрицы (4) равна $r_i = (1 - \mu_i) \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} = (1 - \mu_i) \leq 1$. Следовательно и $r = \min_{i=1, N} r_i > 0, R = \max_{i=1, N} r_i \leq 1$. Если $r < R$, то из предложения 3 следует, что $\lambda_A < R \leq 1$. Если же $r = R$, то все $r_i = R = 1 - \mu < 1$. Из предложения 3 тогда следует равенство $\lambda_A = R < 1$ ■

Лемма 1. Если все параметры $\mu_i < 1$, то система уравнений (3), а значит и система (1) однозначно разрешимы и справедливы следующие рекуррентные соотношения

$$\mathbf{p}(k+1) = (E - A)^{-1} M \mathbf{p}(k). \quad (5)$$

Если же при этом $\mathbf{p}(k) \geq 0$, то и $\mathbf{p}(k+1) \geq 0$.

Из условий леммы и предложения 2 следует, что неотрицательная матрица A неразложима, а из предложения 5 заключаем, что её фробениусово число λ_A меньше единицы. Тогда предложение 4 гарантирует продуктивность матрицы $E - A$. То есть уравнение (3) имеет решение (5) ■

Задача.

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,1 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Из предложения 4 следует, что для того, чтобы определить продуктивна матрица A или нет мы должны найти её фробениусово число λ_A . В случае, если $\lambda_A < 1$, матрица A будет продуктивной, иначе – нет. Для матрицы A :

$$r_1 = 0,7,$$

$$r_2 = 1,0,$$

$$r_3 = 0,9,$$

значит $r = 0,7, R = 1$. Поскольку $r < R$, то из предложения 3 следует, что $\lambda_A < R = 1$.

Ответ: Матрица A продуктивна.

Билет 24 опишите математическую модель коллективного поведения Краснощекова и рассмотрите случай, когда у всех членов коллектива коэффициенты индивидуализма $\mu_i = 0, i = 1, \dots, N$

Итак, модель Краснощекова коллективного поведения – это

$$P_j = \alpha_j \mu_j + (1 - \mu_j) \sum_{i=1}^N \lambda_{ji} P_i, \quad j=1,2,\dots,N.$$

Или, в матричном виде

$$P = AM + (E - M) \Lambda P,$$

α_j – априорная вероятность перехода индивида с индексом j в рассматриваемое состояние

μ_j – степень независимости индивида от окружающих

P_j – итоговая вероятность индивида с индексом j в рассматриваемое состояние

λ_{ji} – вероятностью того, что j -й индивид поступит так же, как и i -й, т.е. перейдет в новое состояние с вероятностью P_i ,

Если $\mu_j = 0$, то индивид абсолютно зависим, не имеет своего мнения и не может никак повлиять на окружающих.

Если все $\mu_j = 0 \forall j \in 1, \dots, N$, то такая группа называется стадом, и рассматривается в рамках данного билета

Стадо. Сначала проведем обещанный нами ранее анализ случая, когда все индивиды абсолютно зависимы, т.е. все $\mu_i = 0$. В этом случае матрица $M=0$, и уравнение (1.3) принимает вид $(E - \Lambda)P = 0$. Суммы элементов каждой из строк матрицы $E - \Lambda$, в силу свойств стохастической матрицы Λ , равны нулю. Следовательно, определитель матрицы $E - \Lambda$ равен нулю, а это, как известно, обеспечивает существование решения и его неединственность. Последнее вполне объяснимо, так как в коллективе абсолютно зависимых индивидов нет индивида с более или менее определенными устремлениями. Однако поведение индивидов в таком коллективе не является хаотичным. Несмотря на неопределенность состояния коллектива, все индивиды ведут себя, в некотором смысле, как единое целое: все P_j равны между собой, т.е. индивиды подражают друг другу.

Действительно, из (1.1) следует

$$P_j = \sum_{i=1}^N \lambda_{ji} P_i.$$

Предположим, что не все P_j равны между собой. Тогда среди них должны быть максимальные $P_j = P_m$ - Следовательно,

$$P_m = \sum_{i=1}^N \lambda_{mi} P_i,$$

а это, в силу свойств матрицы Λ , как мы видели ранее, возможно лишь, когда все Λ равны между собой. Таким образом, индивиды ведут себя, как единое целое.

Требование неразложимости матрицы Λ обусловлено представлением о том, что подразумевается под понятиями коллектив и абсолютная зависимость. Если допустить, что матрица Λ разложима, придем к тому, что в основном коллективе могут возникнуть независимые друг от друга подколлективы, что, вообще говоря, нехорошо, так как предполагает либо отсутствие контактов между отдельными частями коллектива, либо противоречит абсолютной зависимости индивидов. В дальнейшем мы увидим, что отдельные подколлективы (их можно называть партиями) могут возникать в общем коллективе, но это будет обусловлено наличием в нем лидеров различных ориентации. Однако "вернемся к нашим баранам*". Исследуемый здесь коллектив абсолютно зависимых индивидов очень напоминает стадо без вожака, или неориентированную уличную толпу. Поведение индивидов непредсказуемо, хотя действуют они как единое целое, т.е. переходят в новое состояние с одной для всех вероятностью P , значение которой, вообще говоря, произвольно. Однако из этого безразличного состояния коллектив легко выводится любым провоцирующим действием (формально, любым малым возмущением одного из параметров μ_j): достаточно одному из индивидов как-то сориентироваться, весь коллектив следует за ним. Действительно, если в коллективе вдруг появился индивид, у которого $\mu_k > 0$, то ситуация резко

меняется. Решение становится единственным: у всех индивидов $P_j = \alpha_k$, где α_k , - априорная вероятность k -го индивида. Проверяется это простой подстановкой $P_j = \alpha_k$ в уравнения системы(1.1). Таким образом, поведение k -го индивида копируют все. Не зря с древних времен бытует поговорка: "дурная овца все стадо портит". Теперь понятно, почему этот пункт был озаглавлен: стадо. В этом смысле абсолютно зависимого индивида условно можно было бы называть "стадным". Кажется естественным в первую очередь исследовать коллективы, в которых при условии абсолютной зависимости индивиды не отдают друг другу персональных

предпочтений. В таком коллективе $\lambda_{ji} = \frac{(1-\delta_{ji})}{N-1}$, где δ_{ji} . - символ Кронекера. Действительно, в общем случае у нас нет никаких разумных априорных соображений о том, как назначать параметры λ_{ji} , а заниматься апостериорной подгонкой под ответ с научных позиций неэтично.

Поэтому постараемся оставаться в рамках простых и разумных предположений. В дальнейшем, за некоторыми исключениями, мы будем работать в пределах предложенной схемы.

Билет 25. Популяционные игры. Равновесие Нэша и строгое равновесие.

1 Популяционная игра.

Популяционная игра — статическая модель взаимодействия в большой однородной группе индивидуумов.

Это понятие подобно игре в нормальной форме в классической теории, и для него обобщаются основные некооперативные принципы оптимальности:

- РН
- решение по доминированию,
- а также вводится понятие эволюционно устойчивой стратегии

Формально **популяционная игра** G задается совокупностью параметров

$$G = \langle J, f_j(\pi, \omega), j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega \rangle$$

- где J — множество стратегий участников этой игры.
- $\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ — распределение игроков по стратегиям.
- $\Pi = \{\pi | \pi_j \geq 0, \sum_{j \in J} \pi_j = 1\}$ — стандартный симплекс.
- $f_j(\pi, \omega)$ - выигрыш игроков, использующих стратегию j , в зависимости от распределения по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и состояния внешней среды). Для социальных популяций в качестве выигрыша обычно рассматривают полезность потребления, доход или прибыль. В данном разделе эта функция задана экзогенно.

2 Пример популяционной игры (M. Smith).

Рассматриваются парные конкурентные столкновения за некоторый ресурс. Пусть индивидуумы популяции ищут желаемые объекты (пищу, место для жилья или самку). Некоторые из них получают объект без столкновения, а другие случайным образом сталкиваются в парах, причем одни из них оказываются в роли α хозяина объекта конкуренции, а другие — в роли β захватчика;

- J^α, J^β — множества вариантов поведения (альтернатив) в соответствующих ролях.

- $\phi_{j^\alpha, j^\beta}^\alpha$ и $\phi_{j^\alpha, j^\beta}^\beta$ — выигрыши индивидуумов, если α выбирает вариант $j^\alpha \in J^\alpha$, а β — вариант $j^\beta \in J^\beta$.
- $\lambda(N)$ — вероятность столкновения. Не зависит от стратегий и определяется численностью популяции N .
- ϕ^0 — выигрыш индивидуумов, избежавших столкновения.
- Стратегия индивидуума — пара $j = (j^\alpha, j^\beta)$, где $j^\alpha \in J^\alpha$, а $j^\beta \in J^\beta$ — правило выбора варианта поведения в зависимости от роли.
- Функция $f_i(\pi, N)$, указывает средний выигрыш индивидуумов, использующих стратегию j .

Обозначим через $p_\alpha(\pi)$ и $p_\beta(\pi)$ распределения по вариантам поведения индивидуумов в ролях α и β , соответствующие распределению по стратегиям π . Тогда

$$p_{j^\alpha}(\pi) = \sum_{j^\beta \in J^\beta} \pi_{j^\alpha, j^\beta}, p_{j^\beta}(\pi) = \sum_{j^\alpha \in J^\alpha} \pi_{j^\alpha, j^\beta}$$

а для стратегии $i = (i^\alpha, i^\beta)$

$$f_{i^\alpha, i^\beta}(\pi, N) = (1 - \lambda(N))\phi^0 + \frac{1}{2}\lambda(N) \left(\sum_{j^\beta \in J^\beta} \phi_{i^\alpha, j^\beta}^\alpha p_{j^\beta}(\pi) + \sum_{j^\alpha \in J^\alpha} \phi_{j^\alpha, i^\beta}^\beta p_{j^\alpha}(\pi) \right)$$

Рассмотрим также случай, когда **участники не различают состояния**. Тогда множество стратегий совпадает с множеством альтернатив:

$$J = J^\alpha = J^\beta, \pi = (\pi_j, j \in J), \phi_i^\alpha j = \phi_i j, \phi_i^\beta j = \phi_i j$$

$$\bar{f}_i(\pi) = \sum_{j \in J} \pi_j \phi_i j,$$

$$f_i(\pi, N) = (1 - \lambda(N))\phi^0 + \lambda(N)\bar{f}_i(\pi)$$

В этом случае G эквивалентна игре $\bar{G} = \langle J, \bar{f}_i(\pi), i \in J, \pi \in \Pi \rangle$. Ситуация, когда множество вариантов поведения и значения выигрыша индивидуума не зависят от его роли, возможна и в предыдущей модели. Однако модели поведения для этих внешне похожих ситуаций оказываются совершенно различными.

3 Основные статические принципы оптимальности.

Равновесием по Нэшу популяционной игры G называется такое распределение π^* , что всякая стратегия, используемая с положительной частотой, является

оптимальным ответом на данное распределение при любом значении параметра ω , т.е.

$$\forall \omega \in \Omega, \forall j \in J, (\pi_j^* > 0) \rightarrow j \in \text{Arg} \max_{i \in J} f_i(\pi^*, \omega) \quad (1)$$

Пусть функции выигрыша в игре G разложимы, то есть имеют вид $f_j(\pi, \omega) = a(\pi, \omega) \bar{f}_j(\pi) + b(\pi, \omega)$, где $a(\pi, \omega) > 0$, как в модели случайных парных столкновений. Отметим, что та часть функции выигрыша, которая зависит от выбора игроком стратегии, не зависит от параметра модели ω . Тогда (1) эквивалентно следующему условию, которое уже не содержит параметра ω :

$$\forall j \in J : \pi_j^* > 0 \rightarrow j \in \text{Arg} \max_{i \in J} \bar{f}_i(\pi^*)$$

Понятие равновесия по Нэшу является самым известным критерием оптимальности, используемым в моделировании поведения. Однако, из анализа динамических моделей известно, что среди равновесий по Нэшу бывают и неустойчивые состояния, которые фактически не могут реализоваться. Поэтому приведем другие, **более сильные, критерии оптимальности. Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС)** для популяционной игры G называется такое распределение π^* , что $\forall \omega \in \Omega, \forall \pi \neq \pi^*, \exists \bar{\lambda}(\pi) \in (0, 1) : \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}(\pi))$

$$f_{\pi^*}(\lambda\pi + (1 - \lambda)\pi^*, \omega) > f_{\pi}(\lambda\pi + (1 - \lambda)\pi^*, \omega)$$

Здесь $f_{\pi}(\pi', \omega) = \sum_{j \in J} \pi_j f_j(\pi', \omega)$ — средний выигрыш смешанной стратегии, или распределения π , если индивидуумы в популяции распределены по чистым стратегиям согласно π' .

Понятие ЭУС можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую популяцию, находящуюся в состоянии равновесия π^ , внедряется относительно небольшая группа "мутантов" с распределением по стратегиям π . Тогда, если распределение π^* является эволюционно устойчивым, то внедрившаяся группа не сможет закрепиться в популяции, так как ее средняя приспособленность меньше, чем приспособленность исходной стратегии π^* .*

Всякая ЭУС является равновесием Нэша. Действительно, если π не является равновесием, то мутанты с чистой стратегией лучшего ответа на π получают

больший выигрыш, чем средний выигрыш в основной популяции. В силу непрерывности f относительно π это справедливо для любой достаточно малой группы таких мутантов. Данное утверждение справедливо, если доля отдельного индивида в популяции пренебрежимо мала в том смысле, что изменение его стратегии не влияет на значения функций выигрыша (Schaffer, 1988, 1989).

Уточним понятие ЭУС для взаимодействий в группах конечной численности, где **изменение стратегии отдельного индивида влияет на значение функций выигрыша.**

Для симметричной игры в нормальной форме с n игроками, множеством стратегий S и функцией выигрыша $f_j(s_j, s_{J \setminus j})$ ЭУС определяется как симметричная ситуация $s_j \equiv s$ такая, что при любом изменении стратегии отдельным игроком его выигрыш в новой ситуации будет не больше, чем выигрыш любого из остальных игроков, сохранивших прежнюю стратегию. Т.е., *"мутант" не получает преимущества перед "основной популяцией" в смысле значения выигрыша.*

Так определенная ЭУС может не являться равновесием Нэша. В частности, для игры, соответствующей симметричной олигополии Курно, в равновесии Нэша игроки используют "рыночную власть" и снижают объемы выпуска по сравнению с конкурентным равновесием, в то время как ЭУС соответствует конкурентному равновесию.

Строгим равновесием популяционной игры G называется такое распределение π^* , что все игроки используют одну и ту же стратегию, которая является единственным лучшим ответом на это распределение:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists j \in J : \pi_j^* = 1$$

и

$$\forall i \neq j, \forall \omega \in \Omega : f_j(\pi^*, \omega) > f_i(\pi^*, \omega) + \varepsilon$$

Отметим, что **всякое строгое равновесие является ЭУС**, в том числе для групп с достаточно большой конечной численностью.

Schaffer (1988) показал, что для случайных столкновений при наличии ролевой

асимметрии участников (Ухозяин-захватчикУ в рассмотренном примере) не существует иных ЭУС, кроме строгих равновесий.

Для **функций выигрыша** $f_j(\pi, \omega)$ **общего вида равновесий по Нэшу может не существовать**. В других классах игр их оказывается много, причем большинство из них заведомо неустойчивы. В связи с этим представляет интерес другой принцип оптимальности — **доминирование**, также внутренне связанный с концепцией естественного отбора Дарвина.

4 Понятия доминирования

Говорят, что **стратегия j доминирует** стратегию i ($j \succeq i$) на множестве распределений $\Pi' \subseteq \Pi$, если при любом распределении по стратегиям $\pi \in \Pi'$ стратегия j **дает больший выигрыш**, чем стратегия i :

$$\exists \varepsilon \geq 0 : \forall \omega \in \Omega, \forall \pi \in \Pi', f_j(\pi, \omega) \geq f_i(\pi, \omega) + \varepsilon$$

Множество $J' \subseteq J$ называется доминирующим, если оно может быть получено в результате последовательного **исключения доминируемых стратегий**, т.е. найдется такое целое $T > 1$, что

$$J' = J_T \subset J_{T-1} \subset \dots \subset J_1 = J, \forall k \in \{1, \dots, T-1\}, \forall i \in J_k \setminus J_{k+1}, \exists j \in J_{k+1} : j \succeq i$$

на $\Pi_k = \{\pi \in \Pi, \pi_j = 0, \forall j \notin J_k\}$.

Описанная процедура последовательного исключения доминируемых стратегий может рассматриваться как квазидинамическая модель микроэволюции поведения в популяции. Действительно, эта процедура описывает последовательное сокращение множества стратегий, используемых игроками, при этом на каждом шаге более эффективные (обеспечивающие большую приспособленность) стратегии замещают менее эффективные.

Если в данном определении доминирования $\varepsilon > 0$, то **говорят, что стратегия j строго доминирует** стратегию i ($j \succ i$), а J' называется **строго доминирующим множеством**. Понятия доминирования смешанными стратегиями и доминирующего

в смешанных стратегиях множества вводятся аналогично.

5 Поиск РН и доминирующих множеств популяционной игры.

Поиск равновесий по Нэшу и доминирующих множеств популяционной игры в общем случае представляет довольно сложные экстремальные задачи. Для **случайных парных столкновений** их удастся свести к известным задачам вычисления соответствующих **ситуаций равновесия для биматричных игр**.

Утверждение 2.1. Распределение π^* является равновесием по Нэшу игры $\bar{G}$, в которой $\bar{f}_i(\pi) = \sum \pi_j \phi_{ij}$ и участники столкновений не различают состояния, в том и только в том случае, если (π^*, π^*) — равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях симметричной биматричной игры $\Gamma = \langle (\phi_{ij})_{i,j \in J}, (\phi_{ji})_{i,j \in J} \rangle$, т.е.

$$\forall j \in J, \pi_j^* > 0 \rightarrow j \in \operatorname{Arg} \max_{i \in J} \bar{f}_i(\pi).$$

Утверждение 2.2. Распределение π^* , для которого $\pi_s^* = 1$ является строгим равновесием игры $\bar{G}$ в том и только в том случае, если $\phi_{ss} > \phi_{is}$ для всех $i \neq s$, т.е. (s, s) — строгое симметричное равновесие по Нэшу игры Γ в чистых стратегиях.

Утверждение 2.3. Стратегия s доминирует стратегию r ($s \succeq r$) в игре $\bar{G}$ в том и только в том случае, если $s \succeq r$ в игре Γ , т.е. $\phi_{sj} \geq \phi_{rj}$ для любых $j \in J$.

Утверждение 2.4. Распределение $\pi = (\pi_{j^\alpha, j^\beta})$ тогда и только тогда является равновесием по Нэшу игры G для асимметричных парных столкновений, когда $(p^\alpha(\pi), p^\beta(\pi))$ — равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях игры $\Gamma = \langle (\phi_{j^\alpha, j^\beta}^\alpha), (\phi_{j^\alpha, j^\beta}^\beta) \rangle$.

• Таким образом, для **всех случайных парных столкновений равновесия Нэша популяционной игры соответствуют равновесиям Нэша биматричной игры**, описывающей парное взаимодействие.

• Аналогичная связь существует для случайных столкновений с большим числом участников, когда отдельное локальное взаимодействие характеризуется игрой n лиц. При этом результаты легко обобщаются на случай межпопуляционных столкновений, когда в определенных ролях выступают индивидуумы из разных популяций или социальных групп ("хищник – жертва" "работодатели – наемные работники" и т.п.).

Главное условие соответствия — *независимость распределения по взаимодействующим группам от стратегий участников.*

Билет 26 Модель динамики репликаторов

Модель динамики репликаторов (МДР)

(Модель динамики поведения в самовоспроизводящихся популяциях)

Формально популяционная игра G задается совокупностью параметров

$G = \langle J, f_j(\pi, \omega), j \in J, \pi \in \Pi, \omega \in \Omega \rangle$, где

J – множество стратегий участников этой игры;

$\pi = (\pi_j)_{j \in J}$ – распределение игроков по стратегиям;

$\Pi = \left\{ \pi \mid \pi_j \geq 0, \sum_{j \in J} \pi_j = 1 \right\}$ – стандартный симплекс;

$f_j(\pi, \omega)$ – выигрыш игроков, использующих стратегию j в зависимости от распределения по стратегиям π и других параметров модели ω (например, общей численности популяции и состояния внешней среды).

Для социальных популяций в качестве выигрыша обычно рассматривают полезность потребления, доход или прибыль. В данном разделе эта функция задана экзогенно.

Равновесием по Нэшу популяционной игры G называется распределение π^* такое, что всякая стратегия, которая используется с положительной частотой, является оптимальным ответом на данное распределение при любом значении параметра ω , т.е. ,

$$\forall \omega \in \Omega, \forall j \in J(\pi_j^* > 0) \Rightarrow j \in \operatorname{Argmax}_i f_i(\pi^*, \omega), i \in J \quad (1)$$

Пусть функции выигрыша в игре G разложимы, т.е. имеют вид

$f(\pi, \omega) = a(\pi, \omega)\bar{f}(\pi) + b(\pi, \omega)$, где $a(\pi, \omega) > 0$, как в модели случайных парных столкновений. Отметим, что та часть функции выигрыша, которая зависит от выбора игроком стратегии, не зависит от параметра модели ω . Тогда (1) эквивалентно условию, которое уже не содержит параметра ω :

$$\forall j \in J : \pi_j^* > 0 \Rightarrow j \in \operatorname{Argmax}_i \bar{f}_i(\pi^*), i \in J .$$

Понятие равновесия по Нэшу является самым известным критерием оптимальности, используемым в моделировании поведения. Однако из анализа динамических моделей известно, что среди равновесий по Нэшу бывают и неустойчивые состояния, которые фактически не могут реализоваться.

-
- Популяция характеризуется множеством S возможных стратегий.
 - Распределение индивидуумов по стратегиям в данный момент времени задается вектором $\pi = (\pi_s, s \in S)$.
 - Индивидуумы различаются только стратегиями поведения, не меняют стратегию в течение жизни, а потомки наследуют стратегию родителей.
 - Если говорить о двуполовых популяциях, то в данной модели индивидуумов одного пола следует рассматривать как отдельную популяцию.
 - Известны соответствующие механизмы наследования – генетические, когда стратегия поведения задается генами, сцепленными с половым геном, а также механизмы подражания, когда стратегия определяется путем подражания поведению родителя соответствующего пола.
 - Итог взаимодействия в популяции за данный период времени характеризуется для

участников со стратегией s функцией рождаемости $fer_s(\pi, N)$, определяющей среднее число потомков, и функцией выживаемости $v_s(\pi, N)$, определяющей долю выживших в зависимости от распределения π и общей численности популяции N .

Обозначим $N_s = \pi_s N$ - численность использующих стратегию s .

Тогда динамика численностей $N_s(t)$, $s \in S$, описывается следующей системой:

$$N_s(t+1) = N_s(t)f_s(\pi(t), N(t)), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

где $f_s(\pi, N) = fer_s(\pi, N) + v_s(\pi, N)$ называется функцией приспособленности стратегии s и формализует введенное Ч. Дарвином понятие индивидуальной приспособленности.

На первый взгляд, понятие функции выигрыша не применимо к данной модели: стратегии участников фиксированы, они ни к чему не стремятся и ничего не выбирают. Однако, картина меняется, если посмотреть на динамику распределения по стратегиям.

Приводимая далее теорема показывает, что асимптотика поведения в такой популяции согласуется с приспособленностью как функцией выигрыша индивидуума. В частности, если при $t \rightarrow \infty$ распределение по стратегиям стремится к стационарному, то в популяции остаются лишь те стратегии, которые максимизируют приспособленность (в полном соответствии с дарвиновским принципом естественного отбора выживают наиболее приспособленные). Если при любом распределении одна стратегия обеспечивает большую приспособленность, чем другая, то доля худшей стратегии в распределении $\pi(t)$ стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$. И в этом смысле приспособленность является эндогенной целевой функцией в данной модели.

Связь Равновесий Нэша и устойчивых точек МДР.

Асимптотическая устойчивость ЭУС.

Связь доминирующих множеств стратегий с динамикой поведения.

Теорема 3.1 (о связи равновесий Нэша и устойчивых точек МДР).

Пусть функция приспособленности $f_s(\pi, N)$ разложима:

$f_s(\pi, \omega) = a(\pi, \omega)\bar{f}_s(\pi) + b(\pi, \omega)$, где $a(\pi, \omega) > 0$. Тогда:

- 1) любое устойчивое (по Ляпунову) распределение π^* системы (3.1) является равновесием по Нэшу популяционной игры $\bar{G} = \langle S, \bar{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi \rangle$;
- 2) если начальное распределение $\bar{N}(0) > 0$ и для траектории $\{\bar{N}(t)\}$ существует $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t, \bar{N}(0)) = \pi^*$, то π^* является равновесием Нэша указанной популяционной игры.

Замечание. Система (3.1) не является замкнутой, поскольку правая часть зависит также от $N(t)$. Понятие устойчивого распределения для таких систем формально определено в Богданов, Васин (2002).

Устойчивое распределение в теории вероятностей — это такое распределение, которое может быть получено как предел по распределению сумм независимых случайных величин.

- Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ - независимые одинаково распределённые случайные величины и $\eta_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \alpha_n$, где $\beta_n > 0$, α_n - некоторые нормирующие и центрирующие константы. Если $F_n(x)$ - функция распределения случайных величин, то

предельными распределениями для $F_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ могут быть лишь устойчивые распределения.

- Обратно, для любого устойчивого распределения $F(x)$ существует последовательность случайных величин $\eta_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \alpha_n$, такая, что $F_n(x)$ сходится к $F(x)$ при $n \rightarrow \infty$

(wikipedia)

Теорема 3.2 (об асимптотической устойчивости ЭУС).

Пусть в условиях теоремы 3.1 π^* эволюционно устойчивая стратегия для популяционной игры $\bar{G}$. Тогда π^* – асимптотически устойчивое распределение системы (3.1).

Эволюционно устойчивой стратегией (ЭУС) для популяционной игры G называется такое распределение π^* , что $\forall \omega \in \Omega, \forall \pi \neq \pi^* \exists \bar{\lambda}(\pi) \in (0, 1) : \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}(\pi))$

$$f_{\pi^*}(\lambda\pi^* + (1-\lambda)\pi, \omega) > f_{\pi}(\lambda\pi^* + (1-\lambda)\pi, \omega).$$

Здесь – средний выигрыш смешанной стратегии, или распределения π , если индивидуумы в популяции распределены по чистым стратегиям согласно π' .

Понятие ЭУС можно интерпретировать следующим образом. Пусть в некоторую популяцию, находящуюся в состоянии равновесия π^* , внедряется относительно небольшая группа "мутантов" с распределением по стратегиям π . Тогда, если распределение π^* является эволюционно устойчивым, то внедрившаяся группа не сможет закрепиться в популяции, так как ее средняя приспособленность меньше, чем приспособленность исходной стратегии π^* .

Теорема 3.3 (о связи доминирующих множеств стратегий с динамикой поведения).

Пусть S - строго доминирующее множество стратегий в игре

$$G' = \langle S, \ln \bar{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi \rangle.$$

Тогда для любого $s \notin S$ и любого $\bar{N}(0) > 0 \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_s(t, \bar{N}(0)) = 0$ на соответствующей траектории системы (3.1).

Говорят, что стратегия j доминирует стратегию i ($j \succ i$) на множестве распределений $\Pi' \subseteq \Pi$, если при любом распределении по стратегиям $\pi \in \Pi'$ стратегия j дает больший выигрыш, чем стратегия i , т.е. $\exists \varepsilon \geq 0 : \forall \omega \in \Omega, \forall \pi \in \Pi' f_j(\pi, \omega) \geq f_i(\pi, \omega) + \varepsilon$.

Множество $J' \subseteq J$ называется доминирующим, если оно может быть получено в результате последовательного исключения доминируемых стратегий, т.е. найдется такое целое $T > 1$, что $J' = J_T \subset J_{T-1} \subset \dots \subset J_1 = J$, где $\forall k \in \{1, \dots, T-1\}, \forall j \in J_k \setminus J_{k+1} \exists j \in J_{k+1} : j \succ i$ на $\Pi_k = \{\pi \in \Pi, \pi_j = 0, \forall j \in J_k\}$.

Такая процедура последовательного исключения доминируемых стратегий может рассматриваться как квазидинамическая модель микроэволюции поведения в популяции. Действительно, эта процедура описывает последовательное сокращение множества стратегий, используемых игроками, при этом на каждом шаге более эффективные (обеспечивающие большую приспособленность) стратегии замещают менее эффективные.

Случайное подражание.

Модель динамики репликаторов предполагает действие эволюционного механизма, обеспечивающего прямое наследование стратегий родителей детьми. В какой степени указанные результаты зависят от конкретного эволюционного механизма? Оказывается, что он играет критически важную роль. В качестве альтернативного примера рассмотрим механизм случайного подражания.

Эта модель отличается от динамики репликаторов только в одном отношении: новые индивидуумы не наследуют стратегию родителей, а выбирают в качестве объекта подражания случайного взрослого индивидуума и перенимают его стратегию.

При этом динамика описывается уравнениями

$$N_s(t+1) = N_s(t)v_s(t) + \sum_r N_r(t)fer_r(t) \left[\frac{N_s(t)v_s(t)}{\sum_r N_r(t)v_r(t)} \right], \quad s \in S.$$

Динамика такой системы согласована с функцией выживаемости $v(t)$ в смысле теорем 3.1 – 3.3. Т.е. в данном случае эндогенной функцией полезности оказывается выживаемость, а не приспособленность.

Исходя из предыдущих примеров, может возникнуть впечатление, что мы зашли в тупик, сменив произвол в выборе целевых функций на произвол в выборе эволюционного механизма. Однако, это не так, если принять во внимание, что эволюционные механизмы тоже подвержены естественному отбору. В природе существует конкуренция эволюционных механизмов, и с течением времени отбираются наиболее эффективные.

Модель конкуренции эволюционных механизмов.

Рассмотрим соответствующую модель сообщества нескольких популяций, различающихся только эволюционными механизмами.

- Индивидуумы всех популяций взаимодействуют между собой и в процессе взаимодействия не различают популяций, т.е. эволюционный механизм индивидуума является ненаблюдаемым параметром.
- Итог взаимодействия для индивидуумов со стратегией s характеризуется функциями рождаемости и выживаемости $fer_s(\pi, N)$, $v_s(\pi, N)$, зависящими от общего распределения по стратегиям во всем сообществе и его численности.
- Множество стратегий S и данные функции одинаковы для всех популяций.

Введем обозначения:

- L – множество популяций,
- N_l – численность популяции l ,
- N – общая численность сообщества,
- $\pi^l = \{\pi_s^l, s \in S\}$ распределение по стратегиям в рамках популяции l .

Тогда общее распределение π по стратегиям выражается как

$$\pi = \sum_l \frac{N_l}{N} \pi^l.$$

Пусть изменение распределения по стратегиям в популяции l описывается оператором Φ^l , соответствующим эволюционному механизму этой популяции.

(Например, в одной популяции – это прямое наследование стратегий, в другой – случайное подражание выжившим и т.п. В частности, динамика поведения может быть связана с максимизацией некоторой функции выигрыша).

Динамика сообщества описывается системой

$$N^l(t+1) = N^l(t) \sum_s \pi_s^l(t) f_s(\pi(t), N(t)), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

$$\pi^l(t+1) = \Phi^l(\pi^k(t), N^k(t)), \quad k \in L, \quad l \in L.$$

Теорема 3.4.

Пусть в сообществе существует популяция с механизмом прямого наследования и функция приспособленности разложима. Тогда для динамики общего распределения $\pi(t)$ справедливы следующие аналоги теорем 3.1 и 3.2:

- 1) любое устойчивое распределение π системы (3.2) является равновесием Нэша в популяционной игре $\bar{G} = \langle S, \bar{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi \rangle$;
- 2) если для некоторой траектории $\{\bar{N}(t)\}$ начальное распределение $\bar{N}(0) > 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t, \bar{N}(0)) = \pi^*$ то π^* является равновесием Нэша указанной популяционной игры;
- 3) пусть π - строгое равновесие для популяционной игры $\bar{G}$. Тогда π – асимптотически устойчивое распределение системы (3.2).

Таким образом, модель отбора эволюционных механизмов приводит к выводу, что приспособленность является эндогенной функцией полезности для любой самовоспроизводящейся популяции.

- Идея доказательства первых двух утверждений теоремы прозрачна: если стационарное распределение по стратегиям не является равновесием Нэша относительно функции приспособленности, то ничто не может помешать распространению репликаторов, использующих стратегию оптимального ответа на это распределение, что противоречит его устойчивости.
- Для обобщения теоремы 3.3 об исключении доминируемых стратегий требуются более сильные предположения о разнообразии эволюционных механизмов. Пусть в сообществе есть популяция с эволюционным механизмом Φ^l . Для любой пары стратегий s, r назовем s - r -замещением механизма Φ^l механизм $\Phi_{s,r}^l$ такой, что для стратегий, отличающихся от s, r , доли индивидуумов, использующих эти стратегии, меняются так же, как и при механизме Φ^l , а вместо стратегии s всегда используется стратегия r . Как показано в (Васин, 1995), если для любых s, r, l множество механизмов содержит всевозможные замещения $\Phi_{s,r}^l$, то справедлив аналог теоремы 3.3: всякая исключаемая по строгому доминированию стратегия исчезает со временем, то есть $\pi_s(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.
- Сформулированный результат относится к однородным популяциям без учета возрастной и половой структуры, но легко обобщается для популяций с такими структурами. Аналогом приспособленности при этом является скорость сбалансированного роста популяции, определяемая числом Фробениуса матрицы Лесли (см. Семевский, Семенов, 1982).

Выводы

- Изложенные модели и результаты ЭТИ показывают, что эволюция поведения в самовоспроизводящихся популяциях согласована с известными теоретико-игровыми принципами оптимальности – равновесием

Нэша и исключением доминируемых стратегий.

- Эндогенно формируемая функция выигрыша соответствует определенной Ч. Дарвином индивидуальной приспособленности.

Проблемы

- Однако, как в биологических, так и в социальных популяциях хорошо известны такие формы поведения, как кооперация и альтруизм, которые, видимо, не согласуются с оптимизацией индивидуальной приспособленности.

- Проблема устойчивости смешанных равновесий, т. е. распределений по стратегиям, в которых более одной чистой стратегии используется с положительной вероятностью.

Эта проблема возникает для межпопуляционных взаимодействий, в которых значение выигрыша для индивидуумов одной популяции зависит от распределения по стратегиям в другой популяции, а также для внутрипопуляционных случайных столкновений при наличии ролевой асимметрии между участниками столкновения. Для таких игр смешанные равновесия Нэша никогда не являются эволюционно устойчивыми, а строгих равновесий Нэша может не существовать. Таким образом, не работают достаточные условия устойчивости.

- Распространение альтруистического и кооперативного поведения.

Указанные формы поведения наблюдаются как в биологических, так и в социальных популяциях и, по-видимому, противоречат условию максимизации индивидуальной приспособленности.

- Применимость рассматриваемых эволюционных моделей к социальным популяциям.

Понятие супериндивида - самовоспроизводящейся структуры, которая использует человеческую популяцию как ресурс для собственного воспроизводства и способна влиять на динамику поведения в этой популяции.

27. Теоремы о связи равновесий Нэша и строгих равновесий с устойчивыми точками модели динамики репликаторов.

В МДР предполагается, что в однородной популяции новые индивидуумы (потомки) наследуют стратегии родителей (того же пола) и сохраняют их в течение всего времени жизни. Дадим строгую математическую формулировку МДР с дискретным временем, следуя (Васин А.А., 1989а). Пусть взаимодействие между индивидуумами популяции в каждый период времени описывается популяционной игрой $G = \langle J, f_j(\pi, N), j \in J, \pi \in \Pi, N \geq 0 \rangle$. Выигрыш $f_j(\pi, N)$ представляет собой сумму средней рождаемости $fer_j(\pi, N)$ и выживаемости $v_j(\pi, N)$ для индивидуумов, использующих стратегию j , если общая численность популяции равна N , а распределение по стратегиям π . Обозначим $N_j(t)$ – число особей, использующих в период t стратегию $j \in J$. Тогда динамика такой популяции описывается системой

$$N_j(t+1) = N_j(t)f_j(\pi(t), N(t)). \quad (1.4.1)$$

Таким образом, состояние системы в каждый период полностью характеризуется вектором $\bar{N}(t) = (N_j(t))_{j \in J}$, по которому однозначно определяется распределение по стратегиям $\pi(t) = (\pi_j(t) = N_j(t)/N(t))_{j \in J}$. Отметим, что в случае, когда $f_j(\pi, N) = a(\pi, N)\bar{f}_j(\pi)$, из системы (1.13) вытекает автономная модель динамики $\pi(t)$:

$$\pi_j(t+1) = \pi_j(t)\bar{f}_j(\pi(t)) / \sum_{i \in J} \pi_i(t)\bar{f}_i(\pi(t)), \quad j \in J.$$

Обозначим $N_s = \pi_s N$ - численность использующих стратегию s .

Тогда динамика численностей $N_s(t), s \in S$, описывается следующей системой:

$$N_s(t+1) = N_s(t) f_s(\pi(t), N(t)), t = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

где $f_s(\pi, N) = fer_s(\pi, N) + v_s(\pi, N)$ называется *функцией приспособленности стратегии s* и формализует введенное Ч. Дарвином понятие индивидуальной приспособленности.

На первый взгляд, понятие функции выигрыша не применимо к данной модели: стратегии участников фиксированы, они ни к чему не стремятся и ничего не выбирают. Однако, картина меняется, если посмотреть на динамику распределения по стратегиям.

Приводимая далее теорема показывает, что *асимптотика поведения в такой популяции согласуется с приспособленностью как функцией выигрыша индивидуума*. В частности, если при $t \rightarrow \infty$ распределение по стратегиям стремится к стационарному, то в популяции остаются лишь те стратегии, которые максимизируют приспособленность (в полном соответствии с дарвиновским принципом естественного отбора выживают наиболее приспособленные). Если при любом распределении одна стратегия обеспечивает большую приспособленность, чем другая, то доля худшей стратегии в распределении $\pi(t)$ стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$. И в этом смысле приспособленность является эндогенной целевой функцией в данной модели.

Теорема 3.1 (о связи равновесий Нэша и устойчивых точек МДР). Пусть функция приспособленности f_s разложима: $f_s(\pi, \omega) = a(\pi, \omega) \bar{f}_s(\pi) + b(\pi, \omega)$, где $a(\pi, \omega) > 0$. Тогда:

- 1) любое устойчивое (по Ляпунову) распределение π^* системы (3.1) является равновесием по Нэшу популяционной игры $\bar{G} = \langle S, \bar{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi \rangle$;
- 2) если начальное распределение $\bar{N}(0) > 0$ и для траектории $\{\bar{N}(t)\}$ существует $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t, \bar{N}(0)) = \pi^*$ то π^* является равновесием Нэша указанной популяционной игры.

Замечание. Система (3.1) не является замкнутой, поскольку правая часть зависит также от $N(t)$. Понятие устойчивого распределения для таких систем формально определено в Богданов, Васин (2002).

Теорема 3.2 (об асимптотической устойчивости ЭУС). Пусть в условиях теоремы 3.1 π^* – эволюционно устойчивая стратегия для популяционной игры $\bar{G}$. Тогда π^* – асимптотически устойчивое распределение системы (3.1).

Теорема 3.3 (о связи доминирующих множеств стратегий с динамикой поведения). Пусть S - строго доминирующее множество стратегий в игре $G' = \langle S, \ln \bar{f}_s(\pi), s \in S, \pi \in \Pi \rangle$.

Тогда для любого $s \notin S$ и любого $\bar{N}(0) > 0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_s(t, \bar{N}(0)) = 0$ на соответствующей траектории системы (3.1).

Билет 28

О распространении альтруизма и кооперации

- Как принцип максимизации индивидуальной приспособленности соотносится с реальным поведением в биологических и социальных популяциях?
- Какие дополнения следует ввести в модели для более точного отражения реальной эволюции поведения?

Сначала остановимся на поведении в биологических популяциях. Общее мнение биологов состоит в том, что реальное поведение в основном не противоречит этому принципу (III Congress of the ESEB, 1991). Исключения: **кооперация и альтруизм**.

Понятия кооперативного и альтруистического поведения можно пояснить с помощью различных вариантов известной игры “дилемма заключенного”. В этой симметричной игре двух лиц у каждого из игроков есть две стратегии поведения: кооперативная (К) и эгоистичная (Э). В общем случае:

- При любом поведении партнера выгоднее эгоистичная стратегия ($u_{ЭЭ} > u_{КЭ}, u_{ЭК} > u_{КК}$)
- Суммарный выигрыш максимален, когда оба действуют кооперативно ($u_{КК} > (u_{ЭК} + u_{КЭ})/2, u_{КК} > u_{ЭЭ}$).

В качестве примера приведем следующую матрицу выигрышей:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} К \\ Э \end{array} \\ \begin{array}{c} К \\ Э \end{array} & \begin{pmatrix} (5,5) & (1,6) \\ (6,1) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

В данной игре существует единственная точка равновесия Нэша, которая соответствует эгоистичному поведению и является также решением по доминированию.

Известно, однако, что в реальности игроки в подобных ситуациях часто ведут себя кооперативно.

Еще в большей степени отклоняется от максимизации индивидуальной приспособленности альтруистическое поведение. Рассмотрим следующую матрицу выигрышей

(А – альтруистическое поведение, Э – эгоистичное поведение):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} А \\ Э \end{array} \\ \begin{array}{c} А \\ Э \end{array} & \begin{pmatrix} (5,5) & (1,10) \\ (10,1) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Здесь альтруистическое поведение одного из партнеров в сочетании с эгоистичным поведением другого соответствует максимизации суммарной приспособленности. При этом альтруист получает меньше своего гарантированного выигрыша, который он мог бы получить в равновесии Нэша.

В качестве **примера кооперации** в биологических популяциях отметим поведение животных, которые по очереди выполняют функцию сторожа. Сторож стоит на страже и подает сигнал при появлении хищника. Выгодное отклонение от этого поведения:

- не следить за хищником и не подавать сигнал
- следить за хищником и не подавать сигнал.

Дело в том, что подача сигнала привлекает хищника к тому, кто его подал. Если ни один член популяции не будет выполнять функцию сторожа, то все проиграют.

Другим примером является совместная охота группы хищников, при этом эгоисты экономят затраты энергии в процессе охоты в ущерб общей эффективности.

Что касается альтруизма, то его примеры наблюдаются в отношениях между родственниками.

- Альтруизм *родителей по отношению к детям.*
 - Явление достаточно распространенное, оно не противоречит концепции максимизации приспособленности, т.к. она равна сумме рождаемости и выживаемости.
 - Если за счет жертвы индивидуум спасает своих детей, это может быть оптимальным с точки зрения индивидуальной приспособленности.
- Интересны *проявления альтруизма, не связанные с максимизацией индивидуальной приспособленности.*
 - Наблюдаются у общественных насекомых (пчелы, муравьи, термиты).
 - В этих популяциях часть индивидуумов свою приспособленность не максимизирует, т.к. потомства они не оставляют, но при этом бесстрашно нападают на любого агрессора и жертвуют собой, защищая семью.
 - Объяснение состоит в том, что индивидуумы, входящие в семьи общественных насекомых, являются близкими родственниками.

Недостаток модели прямого наследования состоит в том, что она учитывает только связь “родитель-ребенок” и не учитывает связи типа “брат-сестра”. Учитывая эти связи, можно объяснить распространение альтруистического поведения в смысле максимизации приспособленности группы родственников.

Опишем соответствующую модель. Предположим, что взаимодействие в популяции характеризуется множеством стратегий S и функциями приспособленности $f_s(\pi)$, $s \in S$. Главное отличие данной модели - **индивидуум способен различать сибсов** (родных братьев или сестер) среди других членов популяции и выбирать стратегию в зависимости от этого признака.

Полная стратегия (s, s') включает:

- компоненту s , применяемую к сибсам,
- компоненту s' для прочих индивидуумов.

В данный период времени индивидуум с некоторой интенсивностью $\lambda_r \in (0,1)$ взаимодействует с сибсами, а с интенсивностью $1 - \lambda_r$ - с остальными индивидуумами из популяции.

Общая приспособленность аддитивно зависит от результатов взаимодействия с родственниками и с остальной частью популяции:

$$\bar{f}_{(s,s')}(\pi') = \lambda_r f'_s(s) + (1 - \lambda_r) f_{s'}(\pi'),$$

- $f'_s(s)$ - функция, описывающая результаты взаимодействия с сибсами,
- π' - распределение по компоненте s' .
- Предполагается, что все сибсы применяют одну (унаследованную) стратегию.

Таким образом, взаимодействие характеризуется популяционной игрой

$$\bar{G} = \langle \bar{S} = \{(s, s') \in S \times S\}, \bar{f}_{(s,s')}(\pi) = \lambda_r f'_s(s) + (1 - \lambda_r) f_{s'}(\pi) \rangle,$$

где π - распределение по полным стратегиям.

Теорема 5.1. Всякая стратегия (s, s') , в которой $s \notin \text{Arg max}_i f'_i(i)$, строго доминируется стратегией (s^*, s') , где $s^* \in \text{Arg max}_i f'_i(i)$. Распределение π является равновесием Нэша в том и только том случае, если для всех указанных неоптимальных стратегий $\pi_{ss'} = 0$, а соответствующее распределение π' является равновесием Нэша для игры $\langle S, f_{s'}(\pi') \rangle$.

Таким образом, в отношениях типа “дилеммы заключенного” сибсы используют кооперативную стратегию применительно друг к другу.

Чтобы объяснить распространение альтруистического поведения, рассмотрим следующую модификацию модели.

Если отказаться от предположения об одинаковом состоянии сибсов и считать, что они могут оказаться в разных ролях (например, доминирующей и подчиненной), а стратегия и функция приспособленности могут зависеть от роли, то полная стратегия в отношении родственников задается парой $s = (s_\alpha, s_\beta) \in S \times S$.

В результате исключения строго доминируемых стратегий остаются лишь стратегии $s^* = (s_\alpha^*, s_\beta^*) \rightarrow \max_{(s_\alpha, s_\beta)} (f^\alpha(s) + f^\beta(s))$, обеспечивающие максимум суммарной приспособленности.

На основании теоремы 5.1 можно сделать вывод, что эволюция поведения в самовоспроизводящихся популяциях ведет к формированию поведения, максимизирующего суммарную приспособленность сибсов.

Хотя в последней модели неявно заключено ограничение на эволюционный механизм, определяющий динамику распределения по стратегиям в отношении родственников, это ограничение не является существенным: любой другой механизм будет проигрывать реализующему оптимальную стратегию s^* , указанную в теореме 5.1.

Отметим, что указанные результаты допускают обобщение на отношения кузенов, троюродных родственников и т.д.

- стратегия включает варианты $s_1, \dots, s_k$ поведения в отношении родственников различных степеней от 1 до k
- вариант s' в отношении прочих индивидуумов
- функция приспособленности представима в виде $f_i(\pi) = \sum \lambda_i f_{ii}^i(s_i) + (1 - \sum \lambda_i) f_{i'}^i(\pi')$, где $\lambda_i \in (0,1)$ характеризует интенсивность взаимодействия с родственниками степени i .

Как и выше, предполагается, что все родственники применяют в отношении друг друга одну и ту же стратегию, что соответствует модели прямого наследования и не ограничивает общности в рамках изложенной модели отбора эволюционных механизмов.

Очевидно, что исключение строго доминируемых стратегий ведет к оптимизации родственных отношений: остаются такие стратегии s^* , для которых $s_i^* \in \text{Arg max } f_{si}^i(s_i)$, $i = 1, \dots, k$.

Как в биологических, так и социальных популяциях с низким уровнем миграции взаимодействующие индивидуумы обычно имеют общих предков *по крайней мере в седьмом поколении*.

- Рассмотрим двух индивидуумов, случайно выбранных из популяции численностью 10^6 .
- Пусть от противного у них нет общих предков в предшествующих семи поколениях.
- Тогда семь поколений назад у каждого из них было 64 предка каждого пола.
- Пусть численность популяции в это время составляла 104 (что соответствует в среднем четырем детям на семью в этих поколениях).
- Необходимое условие для отсутствия общих предков: ни одна из женщин – предков одного индивидуума не вышла замуж за предка – мужчину другого индивидуума.
 - Вероятность такого события $(1 - 64/5900)^{129} < 0.1$.

Согласно изложенным результатам, следовало бы ожидать повсеместного распространения кооперативного и альтруистического поведения, направленного на максимизацию суммарной приспособленности. Однако реальное поведение зачастую не соответствует принципам “возлюби ближнего своего как самого себя” или “человек человеку друг, товарищ и брат”. Да и в биологических популяциях указанные формы поведения не являются доминирующими. Хорошо известны примеры жестокой конкуренции между близкими родственниками, вплоть до поедания детенышей друг у друга. Одна из причин ограниченного распространения кооперативного поведения – его **неустойчивость к внедрению мутантов - эгоистов**.

Применительно к социальным популяциям возникает следующая задача. Поскольку для разных наций характерно различное соотношение интенсивностей внутривидовых и внешних взаимодействий, то интересно определить *степени альтруизма и кооперации в равновесии Нэша в зависимости от этих параметров и интенсивности мутаций*.

Отметим, что проблеме распространения кооперативного и альтруистического поведения посвящено множество работ.

Например, теория повторяющихся игр объясняет распространение кооперации в повторяющихся конфликтных ситуациях с одними и теми же участниками, исходя из оптимизации индивидуальных функций приспособленности. Повторяемость дает возможность наказывать тех, кто отклоняется от кооперативного поведения. В результате, с учетом наказаний, оказывается индивидуально выгодно вести себя кооперативно. В рассмотренных выше моделях это не так. И, тем не менее, вырабатывается кооперативное поведение за счет отбора механизмов наследования стратегий.

Билет 29

Многоуровневая модель налоговой инспекции.

В базовой модели налоговой инспекции с учетом коррупции предполагалось, что инспекторы и налогоплательщики максимизируют ожидаемые доходы, проверка требует фиксированных издержек и всегда верно определяет категорию проверяемого агента. Однако инспектор, обнаруживший факт уклонения, может быть подкуплен пойманным субъектом. Величина взятки лежит между максимальной приемлемой для плательщика и минимальной приемлемой для инспектора. Для устранения коррупции руководство проводит ревизии: перепроверяет некоторых инспекторов и увольняет скрывших уклонение от уплаты налогов. Стратегия организации инспекции заключается в определении вероятностей проверок и ревизий при фиксированных затратах на одну проверку. Организатор инспекции максимизирует чистый налоговый доход.

В модели предполагается способность центра контролировать фактическую частоту проверок без проведения ревизий. Также есть проблема возможной нехватки честных ревизоров.

Для устранения различных ограничений используется иерархическая контролирующая структура (она и описана ниже), подавляющая коррупцию на всех уровнях с привлечением малого числа честных инспекторов. Предполагается, что в распоряжении организатора инспекции есть доверенные лица, которые проводят проверки на верхнем уровне и всегда проверяют правильно, но стоимость их работы очень высока. Также организатор может привлекать для проверок неограниченное кол-во рациональных инспекторов, готовых брать взятки, если им это выгодно. Организатор определяет кол-во уровней инспекции, вероятность проведения проверки каждым уровнем и зарплаты рациональных инспекторов.

Базовая модель. Формализация задачи.

- Рассматривается фиксированное число N агентов уровня 0 (налогоплательщиков).
- Для каждого из них определен возможный набор действий (налоговых платежей) T_0 . Каждое действие t_0 характеризуется затратами агента. Оптимальное с точки зрения инспекции действие $t_0^*(I)$ зависит от значения некоторой случайной величины (дохода) $I \in [I_{\min}, I_{\max}]$ (например, $t_0^*(I)$ – заданное налоговое правило). $t_0 \in [t_{\min}, t_{\max}]$, где $t_{\min} = t_0^*(I_{\min})$, $t_{\max} = t_0^*(I_{\max})$.
- Независимые и одинаково распределенные случайные величины I имеют функцию распределения $F(I)$, известную всем участникам инспекции.
- Для проведения инспекции могут использоваться 2 типа сотрудников:
 - доверенные лица лидера, издержки на проверку которыми очень высоки.
 - любое необходимое число рациональных инспекторов, максимизирующих свой ожидаемый доход с учетом зарплат, взяток и штрафов.
- Проблема контроля возникает в связи с тем, что конкретное значение случайного фактора I наблюдается только действующим на нижнем уровне агентом.

Базовая модель. Задачи с фиксированными затратами и штрафами

Контролирующая иерархическая структура строится следующим образом:

- Инспекторы первого уровня проверяют агентов уровня 0 с вероятностью $p_1(t_0)$.
- Если проверка выявляет $t_0 < t_0^*$, то агент нулевого уровня выплачивает штраф $f_0(t_0^*(I) - t_0(I))$, $f_0 > 1$.
Стоимость одной проверки на этом уровне составляет c_1 .
- Инспектор первого уровня может вступить в сговор с проверяемым агентом. Для предотвращения коррупции организуется проверка 2-го уровня.
- Вероятность проверки $p_2(t_0, t_1)$ зависит от сообщений агентов уровней 0 и 1.
- ...
- На верхнем уровне k честными инспекторами осуществляется проверка с вероятностью $p_k(t_0, t_1, \dots, t_{k-1})$.
- Если проверка уровня l выявляет $t_l > t_{l-1}$, то все агенты нижестоящих уровней r ($r = 0, 1, \dots, l - 1$) в этой цепочке проверок платят штраф $f_r(t_l - t_{l-1})$.

Замечание 1

В соответствии с нашим подходом, целью инспекции не является выявление коррупции (поскольку это сложно реализуемо и затратно). Вместо этого предлагается предотвратить отклонение от честного поведения на каждом уровне.

Стратегия инспекции P включает:

- Количество уровней k
- Вероятности проверок $p_1(t_0), \dots, p_k(t_0, \dots, t_{k-1})$.

Следующие параметры заданы экзогенно в этой модели:

- Штрафные коэффициенты $f_0, \dots, f_{k-1}$
- Расходы на проверки $c_1, \dots, c_k$.

Задача

Задача состоит в нахождении стратегии инспекции, подавляющей коррупцию и обеспечивающей правильные действия агентов нулевого уровня с минимальными издержками на проверки.

Билет 30. Оптимальная стратегия проверок при фиксированных затратах на проверки и штрафах.

Рассматривается фиксированное число N агентов уровня 0 (налогоплательщиков). Для каждого из них определен возможный набор действий (налоговых платежей) T_0 . Каждое действие t_0 характеризуется затратами агента. Оптимальное с точки зрения инспекции действие $t_0^*(I)$ зависит от значения некоторой случайной величины (дохода) $I \in [I_{min}, I_{max}]$ (например, $t_0^*(I)$ - заданное налоговое правило). $t_0 \in [t_{min}, t_{max}]$, где $t_{min} = t_0^*(I_{min})$, $t_{max} = t_0^*(I_{max})$.

Независимые и одинаково распределенные случайные величины I имеют функцию распределения $F(I)$, известную всем участникам инспекции. Для проведения инспекции могут использоваться 2 типа сотрудников:

доверенные лица лидера, издержки на проверку которыми очень высоки, любое необходимое число рациональных инспекторов, максимизирующих свой ожидаемый доход с учетом зарплат, взяток и штрафов.

Проблема контроля возникает в связи с тем, что конкретное значение случайного фактора I наблюдается только действующим на нижнем уровне агентом.

Контролирующая иерархическая структура строится следующим образом:

- Инспекторы первого уровня проверяют агентов уровня 0 с вероятностью $p_1(t_0)$;
- Если проверка выявляет $t_0 < t_0^*$, то агент нулевого уровня выплачивает штраф $f_0(t_0^*(I) - t_0(I))$, $f_0 > 1$. Стоимость одной проверки на этом уровне составляет c_1 ;
- Инспектор первого уровня может вступить в сговор с проверяемым агентом. Для предотвращения коррупции организуется проверка 2 уровня;
- Вероятность проверки $p_2(t_0, t_1)$ зависит от сообщений агентов уровней 0 и 1;
- ...;
- На верхнем уровне k честными инспекторами осуществляется проверка с вероятностью $p_k(t_0, t_1, \dots, t_{k-1})$;
- Если проверка уровня l выявляет $t_l > t_{l-1}$, то все агенты нижестоящих уровней l в этой цепочке платят штраф $f_r(t_l - t_{l-1})$.

В связи с нашим подходом, целью инспекции не является выявление коррупции (это сложно реализуемо и затратно). Вместо этого предлагается предотвратить отклонение от честного поведения на каждом уровне.

Стратегия инспекции P включает:

количество уровней k , вероятности проверок $p_1(t_0), \dots, p_k(t_0, t_1, \dots, t_{k-1})$.

Следующие параметры заданы экзогенно в этой модели:

штрафные коэффициенты $f_0, \dots, f_{k-1}$, расходы на проверки $c_1, \dots, c_k$.

Задача состоит в нахождении стратегии инспекции, подавляющей коррупцию и обеспечивающей правильные действия агентов нулевого уровня с минимальными издержками на проверки.

Рассмотрим коалицию C_l , включающую некоторое количество агентов уровня 0 и инспекторов уровней $1, \dots, l, l < k$, проверяющих работу агентов из этой коалиции. Стратегия C_l

задается функциями $t_0(I), \dots, t_l(I)$, определяющими сообщения уровней $i=0, \dots, l$ в случае проверки какого-либо агента уровня 0 из этой коалиции.

Определение. Назовем стратегию Р устойчивой к отклонению коалиции C_l , если суммарный выигрыш ее членов достигает максимума при честном поведении, т.е.:

$$t_0(I) = t_0^*(I), t_r(I) = t_0^*(I), r = 1, \dots, l,$$

при условии честного поведения агентов верхних уровней $l+1, \dots, k-1$.

Назовем стратегию Р устойчивой к коалиционным отклонениям, если это условие выполнено для всех $l=1, \dots, k-1$.

При честном поведении ожидаемые затраты на одного агента составят:

$$\int_{I_{min}}^{I_{max}} (p_1(P, I)(c_1 + p_2(P, I)(c_2 + \dots + p_{k-1}(P, I)(c_{k-1} + p_k(P, I)c_k) \dots)) dF(I)$$

где $p_i(P, I) = p_i(t_0^*(I), \dots, t_0^*(I))$.

Утверждение 1. Оптимальные вероятности проверок в стратегии, устойчивой к коалиционным отклонениям, удовлетворяют условиям

$$p_1(t_0) = \hat{p}_1 = \frac{1}{f_0}, p_s(t_0, t_1, \dots, t_{s-1}) = \hat{p}_s = \frac{\sum_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum_{i=0}^{s-2} f_i}$$

для любых $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{s-1} < t_{max}, s = 2, \dots, k$.

Теперь для заданной стратегии Р рассмотрим некооперативное СПР и определим условия существования СПР, соответствующего честному поведению на всех уровнях $0, 1, \dots, k-1$.

- Рассмотрим случай, когда на каждом уровне $s \leq l-1$ отклонение уровня 0 не было полностью выявлено ($t_{l-1} < t_0^*$).
- При каких условиях возможен взаимовыгодный сговор агентов уровней $0, 1, \dots, l$, если агенты верхних уровней действуют честно?

Сговор, выгодный для всех агентов $0, 1, \dots, l$, возможен, если для некоторых $t_l \in [t_{l-1}, t_0^*(I)), b_{il} \geq 0, i = 1, \dots, l-1$ разрешима следующая система:

$$\begin{cases} p_{l+1}(t_0, \dots, t_l) * f_i * (t_0^*(I) - t_l) + b_{il} < f_i * (t_0^*(I) - t_l), i = 0, \dots, l-1, \\ \sum_{i < l} b_{il} - p_{l+1}(t_0, \dots, t_l) * f_l * (t_0^*(I) - t_l) > 0. \end{cases}$$

Здесь b_{il} - взятка, выплачиваемая агентом уровня i последнему проверяющему, t_l - его сообщение.

Определение. Если для любых $I \in (I_{min}, I_{max}], l = 1, \dots, k-1; t_0 \leq \dots \leq t_l < t_0^*(I)$ система несовместна, будем говорить, что стратегия Р определяет СПР с честным поведением.

Утверждение 2. Стратегия Р определяет СПР с честным поведением тогда и только тогда, когда для любых $t_0, \dots, t_{k-1} < t_{max}$ вероятности проверок удовлетворяют условию:

$$p_1(t_0) \geq \frac{1}{f_0}, p_2(t_0, t_1) \geq \frac{f_0}{f_0 + f_1}, p_s(t_0, t_1, \dots, t_{s-1}) \geq \frac{\sum_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum_{i=0}^{s-1} f_i}, s = 2, \dots, k.$$

Утверждение 3. Оптимальная стратегия в классе СПР с честным поведением и оптимальная стратегия, устойчивая к коалиционным отклонениям, совпадают и удовлетворяют условию

$$p_1(t_0) = \hat{p}_1 = \frac{1}{f_0}, p_s(t_0, t_1, \dots, t_{s-1}) = \hat{p}_s = \frac{\sum_{i=0}^{s-2} f_i}{\sum_{i=0}^{s-1} f_i}$$

для любых $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{s-1} < t_{max}, s = 2, \dots, k.$

Билет 31

Поколения архитектур компьютеров и парадигмы программирования

Середина 70-х годов: векторно-конвейерные компьютеры

Особенности архитектуры: векторные функциональные устройства, зацепление функциональных устройств, векторные команды в системе команд, векторные регистры.

Программирование: векторизация самых внутренних циклов.

Начало 80-х годов: векторно-параллельные компьютеры

Особенности архитектуры: векторные функциональные устройства, зацепление функциональных устройств, векторные команды в системе команд, векторные регистры. Небольшое число процессоров объединяются над общей памятью.

Программирование: векторизация самых внутренних циклов и распараллеливание на внешнем уровне, единое адресное пространство, локальные и глобальные переменные.

Начало 90-х годов: массивно-параллельные компьютеры

Особенности архитектуры: тысячи процессоров объединяются с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распределенная память.

Программирование: обмен сообщениями, отсутствие единого адресного пространства, PVM, Message Passing Interface. Необходимость выделения массового параллелизма, явного распределения данных и согласования параллелизма с распределением.

Середина 90-х годов: параллельные компьютеры с общей памятью

Особенности архитектуры: сотни процессоров объединяются над общей памятью.

Программирование: единое адресное пространство, локальные и глобальные переменные, Linda, OpenMP.

Начало 2000-х: кластеры из узлов с общей памятью

Особенности архитектуры: большое число многопроцессорных узлов объединяются вместе с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распределенная память; в рамках каждого узла несколько (многоядерных) процессоров объединяются над общей памятью.

Программирование: неоднородная схема MPI+OpenMP; необходимость выделения массового параллелизма, явное распределение данных, обмен сообщениями на внешнем уровне; распараллеливание в едином адресном пространстве, локальные и глобальные переменные на уровне узла с общей памятью.

Середина 2000-х: кластеры из узлов с общей памятью с ускорителями

Особенности архитектуры: большое число многопроцессорных узлов объединяются вместе с помощью коммуникационной сети по некоторой топологии, распределенная память; в рамках каждого узла несколько (многоядерных) процессоров объединяются над общей памятью; на каждом узле несколько ускорителей (GPU, Phi).

Программирование: MPI+OpenMP+OpenCL/CUDA;

Понятия «поколения архитектур и парадигмы программирования» эквивалентны вопросу «как часто мы вынуждены полностью переписывать приложения?»

С 1976 года до наших дней:

70-е – Векторизация циклов

80-е – Распараллеливание циклов (внешних) + Векторизация (внутренних)

90-е - MPI

середина 90-х - OpenMP

середина 2000-х - MPI+OpenMP

2010-е - CUDA, OpenCL, MPI+OpenMP+ускорители (GPU, Xeon Phi) ...

Виден ли конец процессу переписывания программ?

Для каждого поколения компьютеров мы вынуждены:

- Анализировать алгоритмы(чтобы понять, как их приспособить под новую компьютерную платформу)
- Описывать найденные свойства(чтобы получить эффективную реализацию для новой платформы).

Какие свойства должны войти в “универсальное” (“полное”) описание алгоритмов?

Описание алгоритмов:

-Математическое описание

-Сложность

-Информационный граф

-Свойства и особенности

-Ресурс параллелизма

-Масштабируемость

-Локальность данных

-Детерминированность

-Вычислительная мощность

-Входные / Выходные

данные -Вычислительное

ядро -Макроструктура

-Локальность вычислений

-
Коммуникац
ионный
профиль
-Производит
ельность
-Эффективно
сть

Описание алгоритмов состоит из:

- теоретический потенциал (машинно-независимые свойства)
- особенности реализации

Информационная структура: (сложности описания алгоритмов)

- Как изобразить потенциально бесконечный граф ?
- Как изобразить потенциально многомерный граф ?
- Как показать зависимость структуры графа от размера задачи ?

Способы:

Минимальное остовное дерево (MST) (ресурс “математического” параллелизма)

Минимальное остовное дерево (ресурс классического параллелизма)

Билет 32. Архитектурные особенности современных микропроцессоров.

1. Основные понятия.

Микропроцессорная техника (МПТ) включает технические и программные средства, используемые для построения различных микропроцессорных систем, устройств и персональных микроЭВМ.

Микропроцессорная система (МПС) представляет собой функционально законченное изделие, состоящее из одного или нескольких устройств, главным образом микропроцессорных: микропроцессора и/или микроконтроллера.

Микропроцессорное устройство (МПУ) представляет собой функционально и конструктивно законченное изделие, состоящее из нескольких микросхем, в состав которых входит микропроцессор; оно предназначено для выполнения определенного набора функций: получение, обработка, передача, преобразование информации и управление.

Микропроцессором (МП) называется программно-управляемое устройство, осуществляющее процесс цифровой обработки информации и управления им и построенное, как правило, на одной БИС.

Разные МП или МК объединяют в семейства как технология «микроядра», в качестве которого выступает процессорное ядро, взаимодействующее с периферийными устройствами различной номенклатуры, так и принципы, свойственные открытым системам: совместимость (compatibility), масштабируемость (scalability), переносимость (portability) и взаимодействие приложений (interopability).

Выпускаемые микропроцессоры делятся на отдельные классы в соответствии с их архитектурой, структурой и функциональным назначением. Основными направлениями развития микропроцессоров является увеличение их производительности и расширение функциональных возможностей, что достигается как повышением уровня микроэлектронной технологии, используемой для производства микропроцессоров, так и применением новых архитектурных и структурных вариантов их реализации.

На рисунке приведена классификация современных микропроцессоров по функциональному признаку.



Классификация современных микропроцессоров по функциональному признаку

Микропроцессоры общего назначения предназначены для решения широкого круга задач обработки разнообразной информации. Их основной областью использования являются персональные компьютеры, рабочие станции, серверы и другие цифровые системы массового применения.

Специализированные микропроцессоры ориентированы на решение специфичных задач управления различными объектами. Содержат дополнительные микросхемы (интерфейсы), обеспечивающие специализированное применение. Имеют особую конструкцию, повышенную надежность.

Микроконтроллеры являются специализированными микропроцессорами, которые ориентированы на реализацию устройств управления, встраиваемых в разнообразную аппаратуру. Характерной особенностью структуры микроконтроллеров является размещение на одном кристалле с центральным процессором внутренней памяти и большого набора периферийных устройств.

Цифровые процессоры сигналов (ЦПС) представляют класс специализированных микропроцессоров, ориентированных на цифровую обработку поступающих аналоговых сигналов. Специфической особенностью алгоритмов обработки аналоговых сигналов является необходимость последовательного выполнения ряда команд умножения-сложения с накоплением промежуточного результата в регистре-аккумуляторе. Поэтому архитектура ЦПС ориентирована на реализацию быстрого выполнения операций такого рода. Набор команд этих процессоров содержит специальные команды MAC (Multiplication with Accumulation), реализующие эти операции.

Архитектурой процессора называется комплекс его аппаратных и программных средств, предоставляемых пользователю. В это общее понятие входит набор программно-доступных регистров и исполнительных (операционных) устройств, система основных команд и способов адресации, объем и структура адресуемой памяти, виды и способы обработки прерываний.

При описании архитектуры и функционирования процессора обычно используется его представление в виде совокупности программно-доступных регистров, образующих **регистровую** или **программную модель**. В этих регистрах содержатся обрабатываемые данные (операнды) и управляющая информация. Соответственно, в регистровую модель входит **группа регистров общего назначения**, служащих для хранения операндов, и **группа служебных регистров**, обеспечивающих управление выполнением программы и режимом работы процессора, организацию обращения к памяти (защита памяти, сегментная и страничная организация и др.).

Регистры общего назначения образуют РЗУ - внутреннюю регистровую память процессора. Состав и количество служебных регистров определяется архитектурой микропроцессора. Обычно в их состав входят:

- программный счетчик PC (или CS + IP в архитектуре микропроцессоров Intel);
- регистр состояния SR (или EFLAGS);
- регистры управления режимом работы процессора CR (Control Register);
- регистры, реализующие сегментную и страничную организацию памяти;
- регистры, обеспечивающие отладку программ и тестирование процессора.

Кроме того, различные модели микропроцессоров содержат ряд других специализированных регистров.

Состав устройств и блоков, входящих в структуру микропроцессора, и реализуемые механизмы их взаимодействия определяются функциональным назначением и областью применения микропроцессора.

Архитектура и структура микропроцессора тесно взаимосвязаны. Реализация тех или иных архитектурных особенностей требует введения в структуру микропроцессора необходимых аппаратных средств (устройств и блоков) и обеспечения соответствующих механизмов их совместного функционирования. В современных микропроцессорах реализуются следующие варианты архитектур.

CISC (Complex Instruction Set Computer) - архитектура реализована во многих типах микропроцессоров, выполняющих большой набор разноформатных команд с использованием многочисленных способов адресации. Они выполняют более 200 команд разной степени сложности, которые имеют размер от 1 до 15 байт и обеспечивают более 10 различных способов адресации. Такое большое многообразие выполняемых команд и способов адресации позволяет программисту реализовать наиболее эффективные алгоритмы решения различных задач.

RISC (Reduced Instruction Set Computer) - архитектура отличается использованием ограниченного набора команд фиксированного формата. Современные RISC-процессоры обычно реализуют около 100 команд, имеющих фиксированный формат длиной 4 байта. Также значительно

сокращается число используемых способов адресации. Обычно в RISC-процессорах все команды обработки данных выполняются только с регистровой или непосредственной адресацией.

VLIW (Very Large Instruction Word) - архитектура появилась относительно недавно - в 1990-х годах. Ее особенностью является использование очень длинных команд (до 128 бит и более), отдельные поля которых содержат коды, обеспечивающие выполнение различных операций. Таким образом, одна команда вызывает выполнение сразу нескольких операций параллельно в различных операционных устройствах, входящих в структуру микропроцессора.

Кроме набора выполняемых команд и способов адресации важной архитектурной особенностью микропроцессоров является используемый вариант реализации памяти и организация выборки команд и данных. По этим признакам различаются процессоры с Принстонской и Гарвардской архитектурой.

Принстонская архитектура, которая часто называется архитектурой Фон-Неймана, характеризуется использованием общей оперативной памяти для хранения программ, данных, а также для организации стека. Для обращения к этой памяти используется общая системная шина, по которой в процессор поступают и команды, и данные. Эта архитектура имеет ряд важных достоинств. Наличие общей памяти позволяет оперативно перераспределять ее объем для хранения отдельных массивов команд, данных и реализации стека в зависимости от решаемых задач.

Гарвардская архитектура характеризуется физическим разделением памяти команд (программ) и памяти данных. В ее оригинальном варианте использовался также отдельный стек для хранения содержимого программного счетчика, который обеспечивал возможности выполнения вложенных подпрограмм. Каждая память соединяется с процессором отдельной шиной, что позволяет одновременно с чтением-записью данных при выполнении текущей команды производить выборку и декодирование следующей команды. Благодаря такому разделению потоков команд и данных и совмещению операций их выборки реализуется более высокая производительность, чем при использовании Принстонской архитектуры.

2. Архитектурные особенности

Рассматриваются на основе изучения семейства МП Intel x86.

Архитектурная особенность	Описание	Где впервые появилась
Многозадачность	Возможность работы в одном из двух режимов: реальном (real) и защищенном (protected). В <i>реальном</i> режиме возможно выполнение только одной программы. Адресация оперативной памяти без специальных драйверов ограничивается 1Мб. В <i>защищенном</i> (protected) режиме обеспечивается выполнение сразу нескольких программ за счет переключения между задачами («переключение контекста процессора»). Адресация основной памяти расширена до 4 Гб (в последних МП – до 100 Гб).	Intel 80286
Поддержка системы виртуальных машин	Дальнейшее развитие принципа многозадачности, возможность моделирования в одном МП работу нескольких компьютеров, управляемых <i>разными</i> ОС.	Intel 80386
Конвейерная обработка команд	Одновременное выполнение разных тактов последовательных команд в разных частях МП с непосредственной передачей результатов выполнения из одной части МП в другую. Позволяло достигнуть пятикратного увеличения производительности МП.	Intel 80286
Кэширование данных	Использование высокоскоростного буфера для обмена данными между микропроцессорной памятью (регистрами МП) и основной памятью ЭВМ. В кэш-память заранее копируются те участки памяти, с которыми собирается	Intel i386SLC, Intel i486 Многоуровнево е кэширование

	работать МП. Управление процессом кэширования осуществляется кэш-контроллером и производится <i>параллельно</i> с работой центрального процессора. Современные ЭВМ имеют иерархически организованную кэш-память (до 3 уровней).	– Intel Pentium II
Суперскалярная архитектура	Наличие в микропроцессоре более 1 конвейера для выполнения команд (параллелизм на уровне инструкций).	Intel Pentium
Суперскалярная архитектура с поддержкой внеочередного исполнения команд («динамическое исполнение»)	Наличие в микропроцессоре более 1 конвейера для выполнения команд, а также специальных схем, позволяющих изменить изначальную последовательность выполнения команд (не нарушая смысла алгоритма) с целью параллельной загрузки всех конвейеров.	Intel Pentium Pro
Гарвардская архитектура процессора	В кэш-памяти 1 уровня предусмотрено разделение команд и данных, которые хранятся отдельно друг от друга для повышения эффективности обработки.	Intel Pentium Pro
Расширенный набор инструкций	Новые команды, расширяющие базовый набор инструкций МП, для работы с мультимедийной информацией и одновременной однотипной обработки множественных данных.	Intel Pentium MMX, Intel Pentium III, Intel Pentium IV, Семейство Intel Core, Intel Core 2
Гибридизация RISC и CISC архитектуры	Преобразование стандартных x86-инструкций в RISC-подобные команды фиксированной длины. Еще не выполненные команды записываются в кэш инструкций в том порядке, в котором они будут подаваться на исполняющие устройства (конвейеры) МП. В кэш-памяти может храниться до 12000 микрокоманд. Перевод инструкций формата x86 в микрокоманды ядра процессора происходит асинхронно с работой основных исполняющих устройств.	Intel Pentium IV
Технология одновременной многопоточности	Эмуляция двух логических исполняющих устройств на одном физическом с целью более эффективно исполнять параллельно запущенные потоки команд (параллелизм на уровне потоков).	Intel Pentium IV Hyper-Threading
Многоядерные процессоры	Объединение двух или более исполняющих устройств на одной ИС, действующих как единое устройство. Обычно имеют общий кэш и интерфейсную систему для связи с другими устройствами ЭВМ.	Процессоры семейства Intel Core (Intel Core Duo, Intel Core 2 Duo, Pentium Dual Core, Intel core 2 Quad и др.)
Технология автоматического увеличения тактовой частоты процессора	Для обеспечения дополнительной производительности и при условии соблюдения ограничений по мощности, температуре и току, процессор может автоматически «разгоняться», то есть увеличивать рабочую тактовую частоту всех своих ядер.	Процессоры Core i5, i7

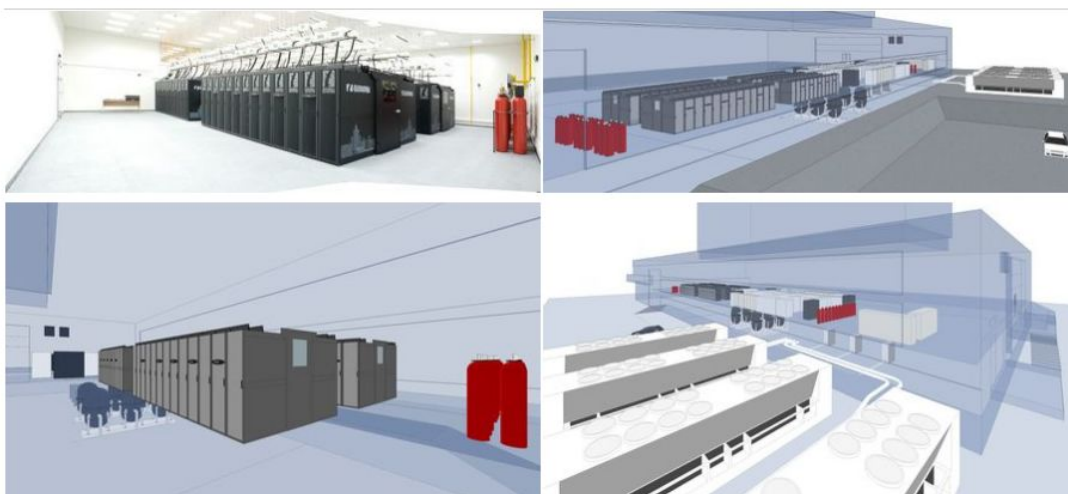
Программно-аппаратная архитектура Ломоносов и BlueGene\P

Суперкомпьютер «Ломоносов», 2015 год (из лекций)

Пиковая производительность	1700.21 TFlop/s
Производительность (Linpack)	901.90 TFlop/s
Эффективность	53%
Вычислительных узлов (Intel)	5 104
Вычислительных узлов (ГПУ)	1 065
Процессоры Intel Xeon 5570, 5670	12 346
NVIDIA Tesla X2070	2 130
Число процессорных ядер (x86)	52 168
Число процессорных ядер (ГПУ)	954 240
Оперативная память	92 ТБайт
Коммуникационная сеть	QDR Infiniband / 10 GE
Система хранения данных	1.75 ПБайт, Lustre, NFS, ...
Операционная система	Clustrx T-Platforms Edition
Занимаемая площадь (вычислитель)	252 м2
Энергопотребление (вычислитель)	2.8 МВт

Суперкомпьютерный комплекс "Ломоносов"

Общий вид комплекса:



Суперкомпьютер "ЛОМОНОСОВ"

Суперкомпьютер «Ломоносов» — первый **гибридный суперкомпьютер** такого масштаба в России и Восточной Европе. В нём используется 3 вида вычислительных узлов и процессоры с различной архитектурой. В качестве основных узлов, обеспечивающих свыше 90 % производительности системы, используется blade-платформа T-Blade2. Предполагается использовать суперкомпьютер для решения ресурсоёмких вычислительных задач в рамках фундаментальных научных исследований, а также для проведения научной работы в области разработки алгоритмов и программного обеспечения для мощных вычислительных систем.

Последние несколько лет рост интереса к суперкомпьютерной тематике связан с выходом на рынок так называемых **гибридных суперкомпьютеров**. То есть суперкомпьютеров, которые наряду с **центральный процессором традиционной архитектуры используют для вычислений специализированные процессоры, в частности, графические.**

Общая характеристика

Основные технические характеристики суперкомпьютера "Ломоносов"	
Пиковая производительность	1,7 Пфлопс
Производительность на тесте Linpack	901.9 Тфлопс
Число вычислительных узлов x86	5 104
Число графических вычислительных узлов	1 065
Число вычислительных узлов PowerXCell	30
Число процессоров/ядер x86	12 346 / 52 168
Число графических ядер	954 240
Оперативная память	92 ТБ
Общий объем дисковой памяти вычислителя	1,75 ПБ
Основной тип процессора	Intel Xeon X5570/Intel Xeon 5670, Nvidia X2070
Число типов вычислительных узлов	8
Основной тип вычислительных узлов	TB2-XN
System/Service/Management Network	QDR Infiniband 4x/10G Ethernet/Gigabit Ethernet

Система хранения данных	Параллельная файловая система Lustre, файловая система NFS, иерархическая файловая система StorNext, система резервного копирования и архивирования данных
Операционная система	Clustrx T-Platforms Edition
Занимаемая площадь	252 м ²
Потребление энергии	2,6 МВт
Вес всех составляющих	Более 75 тонн
Производитель	Т-Платформы(link is external)

Площади помещений:

- Вычислитель: 252 кв. м
- СБЭ (система бесперебойного электропитания): 246 кв.м.
- ГРЩ (главный распределительный щит): 85 кв. м.
- Климатическая система: 216 кв. м.

Энергопотребление:

- Пиковая мощность вычислителя (1,7 Tflops): 2,6 МВт
- Средняя мощность инфраструктуры: 740 КВт.
- Пиковая мощность инфраструктуры при внешней температуре 35 цельсия: 1,2 МВт
- Средняя суммарная мощность комплекса: 2,57 МВт
- Пиковая суммарная мощность комплекса (при 35 цельсия): 3,05 МВт.

Вычислительные узлы и сети Группы вычислительных узлов:

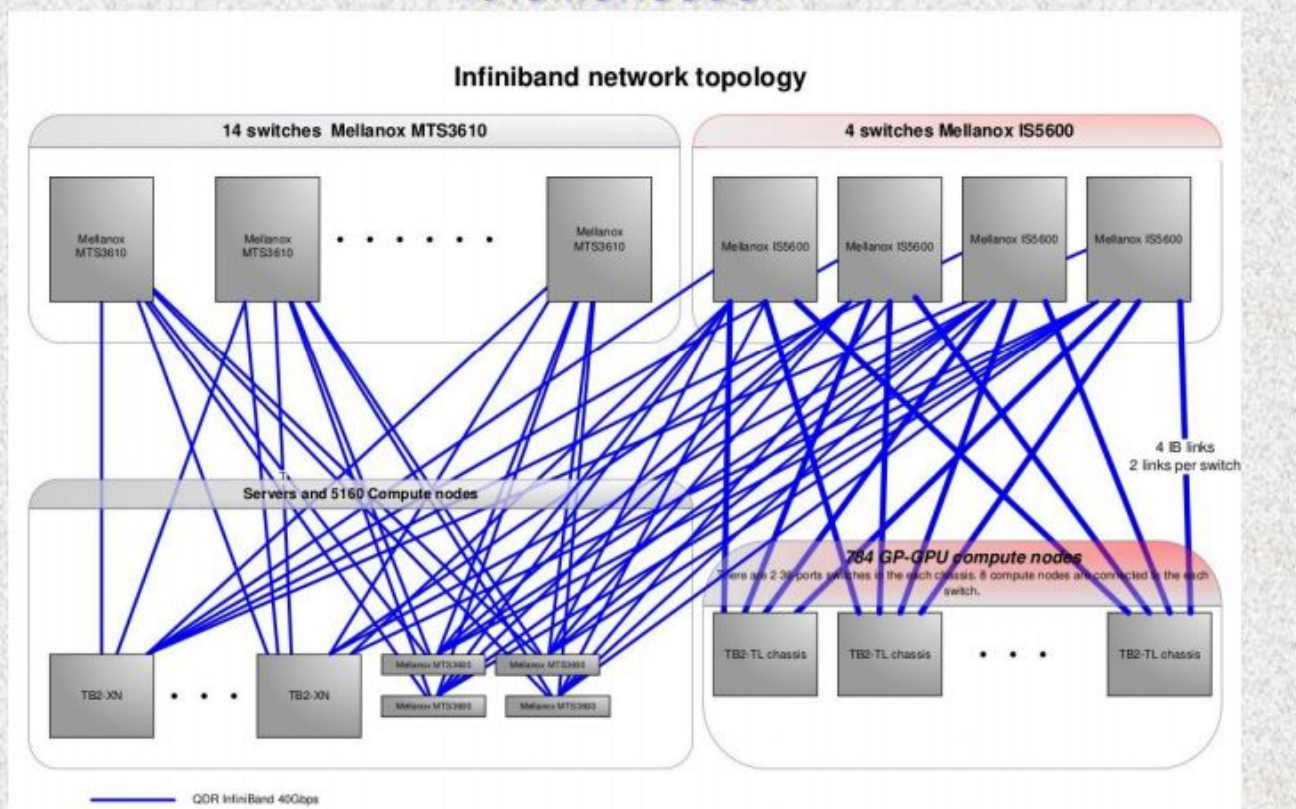
Тип	Процессоры	Кол-во ядер	Опер. память, ГБ	Сумм. кол-во процес.	Сумм. кол-во ядер	Кол-во узлов
T-Blade2(link is external) (УВ1)	2 x Intel® Xeon 5570 Nehalem	2 x 4	12	8 320	33 280	4 160
T-Blade1(УВ2)	2 x Intel® Xeon 5570 Nehalem	2 x 4	24	520	2 080	260
T-Blade2(link is external) (УВ1)	2 x Intel® Xeon 5670 Westmere	2 x 6	24	1 280	7 680	640
T-Blade1(УВ2)	2 x Intel® Xeon 5670 Westmere	2 x 6	48	80	480	40
Узлы на базе IBM® Cell (УВ3)	PowerXCell 8i	8	16	60	480	30

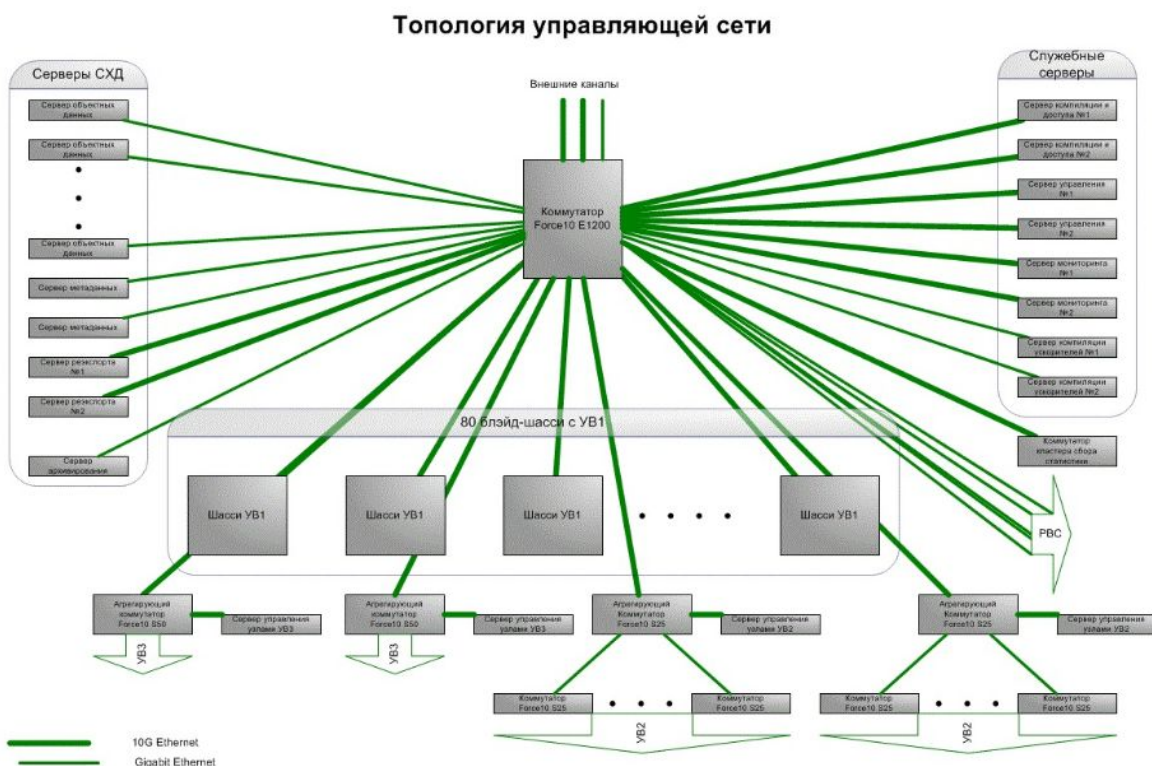
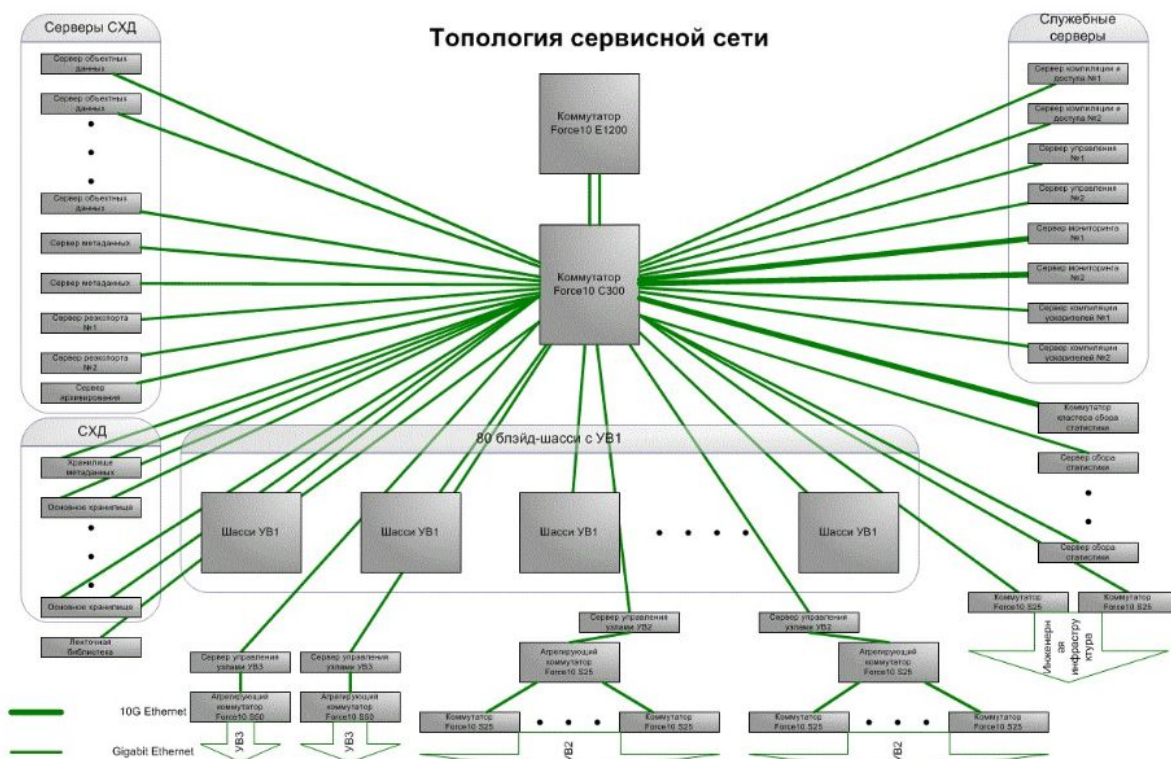
Все узлы связаны тремя независимыми сетями:

- Системная сеть - QDR InfiniBand, 40 Гбит/сек (схема)
- Сервисная сеть - Ethernet, 10 Гбит/сек, 1 Гбит/сек и 100 Мбит/сек (схема)
- Управляющая сеть - Ethernet, 10 Гбит/сек и 1 Гбит/сек (схема)
- Сеть барьерной синхронизации и сеть глобальных прерываний, Т-Платформы

Сеть **fat tree** (рус. *утолщенное дерево*) — топология компьютерной сети, изобретённая Чарльзом Лейзерсоном из MIT, является дешевой и эффективной для суперкомпьютеров^[1]. В отличие от классической топологии дерева, в которой все связи между узлами одинаковы, связи в утолщенном дереве становятся более широкими (толстыми, производительными по пропускной способности) с каждым уровнем по мере приближения к корню дерева. Часто используют удвоение пропускной способности на каждом уровне.

Схема построения Fat Tree в суперкомпьютере «Ломоносов»





Программное обеспечение

- Средства архивации данных: bacula 3 (Т-Платформы), StorNext (Quantum), NetBackup (Symantec)
- Передача файлов: SCP, SFTP
- Управление заданиями и ресурсами: SLURM 2.0
- Среды исполнения: OpenMPI 1.4, MVAPICH 1.1, IntelMPI 4

- Языки программирования: C/C++, Fortran 77/90/95
- Наборы компиляторов: Intel 12, GNU 4.4, Pathscale, PGI
- Средства отладки и анализа производительности: Intel® ITAC 12, grpof 4, Intel® vTune 4, Intel® Thread Checker, Acumem ThreadSpotter, IDB, Allinea DDT
- Системы контроля версий: SVN, GIT
- Языки сценариев: Perl, Python

НПС-приложения MOLPRO, версия 2010.1 (установлено в /opt/molpro2010.1/) - **доступен ТОЛЬКО** сотрудникам МГУ.

Система хранения данных



Что снижает производительность компьютеров с распределенной памятью?

1. Закон Амдала
2. Латентность передачи по сети
3. Пропускная способность каналов передачи данных
4. Особенности использования SMP-узлов
5. Балансировка вычислительной нагрузки
6. Возможность асинхронного счета и передачи данных
7. Особенности топологии коммуникационной сети
8. Производительность отдельных процессоров
9. ...

<http://users.parallel.ru/wiki/pages/22-config>

Конфигурация суперкомпьютеров

Ломоносов-2

Раздел	узлов/х86 ядер (х86 ядер на узел)	GPU-карпамять т на узле	диски	max ядро-ч асов	max/default время (часов на задач задачу)	max на задач	max запущенных задач	max ядер на задачу, не более
compute .	1024 / 14336 (14)	1 (4,5 ГБ/ядро)	нет	нет	72/24	3	3	нет

- Объём памяти на GPU: 11.56 GB
- Модель GPU: Tesla K40s
- Модель CPU: Intel Xeon E5-2697 v3 2.60GHz

Ломоносов

Раздел	узлов/х86 ядер (х86 ядер на узел)	GPU-карпамять т на узле	диск	max ядро-ч асов	max/default время (часов на задач задачу)	max на задач	max запущенных задач	max ядер на задачу, не более
regular4 .	4096 / 32768 (8)	0	нет	нет	72/24	3	3	1024
regular6 .	596 / 7152 (12)	0	нет	нет	72/24	3	3	512
hdd4	260 / 2080 (8)	0	есть	нет	72/24	2	2	256
hdd6	32 / 384 (12)	0	есть	нет	72/24	2	2	128
gpu	830 / 6640 (8)	2	нет	нет	72/24	3	3	256
smp	1 / 128 (128)	0	есть	нет	72/24	3	2	128
test	64 / 512 (8)	0	нет	нет	0,25 (15 минут)/0,25	3	1	128
gputest	16 / 128 (8)	2	нет	64	0,25 (15 минут)/0,25	3	1	64

Очередь по умолчанию - **regular4** "max задач" включает в себя и задачи на счёте и в очереди.

- Объём памяти на GPU: 5.25 GB
- Модель GPU: Tesla X2070
- Модель CPU:
 - regular4, hdd4: Intel Xeon X5570 2.93GHz
 - gpu: Intel Xeon E5630 2.53GHz
 - regular6, hdd6: Intel Xeon X5670 2.93GHz

Описание вычислительного комплекса IBM Blue Gene/P

IBM Blue Gene/P — массивно-параллельная вычислительная система, которая состоит из двух стоек, включающих **8192 процессорных ядер** (2 x 1024 четырехъядерных вычислительных узлов), **с пиковой производительностью 27,9 терафлопс** (27,8528 триллионов операций с плавающей точкой в секунду).

Массивно-параллельные системы с распределенной памятью

- Высокая плотность упаковки
 - процессоры с низким энергопотреблением (40 W ~лампочка)
- Высокопроизводительный интерконект
 - несколько коммутационных подсистем для различных целей
- Ультра легкая ОС
 - выполнение вычислений и ничего лишнего
- Стандартное ПО Standard software
 - Fortran/C/C++ и MPI
- 2048 4-ех ядерных узлов
- пиковая производительность 27.2 Tflop/s
- Реальная производительность по тесту Linpack: 23.2 Тфлоп/с
- 85% от пиковой
- общий объем ОЗУ 4 ТВ

Характеристики системы:

- две стойки с вычислительными узлами и узлами ввода-вывода
- 1024 четырехъядерных вычислительных узла в каждой из стоек
- 16 узлов ввода-вывода в стойке (в текущей конфигурации активны 8, т.е. одна I/O-карта на 128 вычислительных узлов)
- выделенные коммуникационные сети для межпроцессорных обменов и глобальных операций
- программирование с использованием MPI, OpenMP/threads, POSIX I/O
- высокая энергоэффективность: ~ **372 MFlops/W** (см. список Green500)
- система воздушного охлаждения

1 стойка (rack, cabinet) состоит из двух midplane'ов.

В midplane входит 16 node-карт (compute node card),

на каждой из которых установлено 32 вычислительных узла (compute card).

Midplane, 8 x 8 x 8 = 512 вычислительных узлов,

— минимальный раздел, на котором становится доступна топология трехмерного тора; для разделов меньших размеров используется топология трехмерной решетки.

Node-карта может содержать до двух узлов ввода-вывода (I/O card).

Вычислительный узел включает в себя четырехъядерный процессор, 2 ГБ общей памяти и сетевые интерфейсы.

- 1024 четырехъядерных вычислительных узлов
- производительность одного вычислительного узла – 13.6 GF/s
- производительность 1 стойки– 13.9 Tflops
- оперативная память одного узла – 2 GB
- суммарная оперативная память в стойке– 2 TB
- узлов ввода/вывода 8 – 64
- Размеры - 1.22 x 0.96 x 1.96
- занимаемая площадь 1.17 кв.м.
- энергопотребление (1 стойка) - 40 kW (max)

Микропроцессорное ядро:

- модель: PowerPC 450
- рабочая частота: 850 MHz
- адресация: 32-битная
- кэш инструкций 1-го уровня (L1 instruction): 32 KB
- кэш данных 1-го уровня (L1 data): 32 KB
- кэш предвыборки (L2 prefetch): 14 потоков предварительной выборки (stream prefetching): 14 x 256 байтов
- два блока 64-битной арифметики с плавающей точкой (Floating Point Unit, FPU), каждый из которых может выдавать за один такт результат совмещенной операции умножения-сложения (Fused Multiply-Add, FMA)
- пиковая производительность: 2 FPU x 2 FMA x 850 MHz = 3,4 GFlop/sec per core

Вычислительные узлы и I/O-карты в аппаратном смысле неразличимы и являются взаимозаменяемыми, разница между ними состоит лишь в способе их использования. У них нет локальной файловой системы, поэтому все операции ввода-вывода перенаправляются внешним устройствам.

Вычислительный узел:

- четыре микропроцессорных ядра PowerPC 450 (4-way SMP)
- пиковая производительность: 4 cores x 3,4 GFlop/sec per core = 13,6 GFlop/sec
- пропускная способность памяти: 13,6 GB/sec
- 2 ГБ общей памяти
- 2 x 4 МБ кэш-памяти 2-го уровня (в документации по BG/P носит название L3)
- легковесное ядро (compute node kernel, CNK), представляющее собой Linux-подобную операционную систему, поддерживающую значительное подмножество Linux-совместимых системных вызовов
 - Создание процессов и управление ими
 - Управление памятью
 - Отладка процессов
 - Ввод-вывод
- асинхронные операции межпроцессорных обменов (выполняются параллельно с вычислениями)
- операции ввода-вывода перенаправляются I/O-картам через сеть коллективных операций
- Двойное устройство для работы с вещественными числами с плавающей точкой (double precision)
- Объем виртуальной памяти равен объему физической

Характеристики вычислительного узла

– 3 режима использования ядер

• SMP:

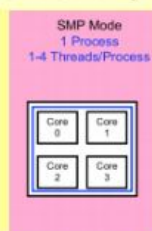
1 MPI процесс из 4 SMP нитей, 2 Гб памяти

• DUAL:

2 MPI процесса по 2 SMP нити, 1 Гб памяти на MPI процесс

• VNM:

4 MPI процесса



Dual Mode
2 Processes
1-2 Threads/Process



Quad Mode (VNM)
4 Processes
1 Thread/Process



Узел ввода-вывода:

- не учитывается при расчете пиковой производительности
- использует сеть коллективных операций для коммуникаций с вычислительными узлами
- подключен к внешним устройствам через Ethernet-порт посредством 10-гигабитной функциональной сети
- операционная система на основе Linux (Mini-Control Program, MCP) с минимальным набором пакетов, необходимых для поддержки клиента сетевой файловой системы и Ethernet-подключений

Коммуникационные сети:

- **трехмерный топ (three-dimensional torus)**
 - сеть общего назначения, объединяющие все вычислительные узлы; предназначена для операций типа «точка-точка»
 - вычислительный узел имеет двунаправленные связи с шестью соседями
 - пропускная способность каждого соединения — 425 MB/s (5,1 GB/s для всех 12 каналов)
 - латентность (ближайший сосед):
 - 32-байтный пакет: 0,1 μ s
 - 256-байтный пакет: 0,8 μ s
- **глобальные коллективные операции (global collective)**
 - коммуникации типа «один-ко-многим» (broadcast-операции и редукция)
 - используется вычислительными узлами для обменов с I/O-картами
 - каждый вычислительный узел и I/O-карта имеют три двунаправленные связи
 - пропускная способность каждого соединения — 850 MB/s (1,7 GB/s для двух каналов)
 - латентность (полный обход): 3,0 μ s
- **глобальные прерывания (global interrupt)**
 - операции барьеров и прерываний (глобальные AND- и OR-операции)
- **функциональная сеть**
 - соединяет узлы ввода-вывода с внешним окружением
 - 10-гигабитная оптическая Ethernet-сеть
- **сервисная сеть (service/control)**
 - загрузка, мониторинг, диагностика, отладка, доступ к счетчикам производительности
 - гигабитная Ethernet-сеть (4 соединения на стойку)

Чтобы разгрузить процессорное ядро от операций, связанных с передачей сообщений по сети трехмерного тора, используется устройство прямого доступа к памяти (direct memory access, DMA). Кроме уменьшения нагрузки на ядро, этот механизм уменьшает вероятность взаимной блокировки процессов, обменивающихся сообщениями, которая может возникнуть вследствие ошибок программиста.

Окружение Blue Gene/P включает

- **фронтэнд (front end node)** — система, открытая для доступа по протоколу SSH; служит для доступа пользователей на вычислительный комплекс; вся связь с комплексом осуществляется только через эту машину; предназначена для разработки пользователями программ, компилирования проектов и постановки задач в очередь; работа с ней осуществляется в интерактивном режиме
- **сервисный узел (service node)** — обеспечивает контроль над системой Blue Gene/P; к этой машине доступа по SSH нет

- систему управления высокопроизводительной параллельной файловой системой IBM General Parallel File System (GPFS)

Назначение	Модель	Процессоры	Количество
фронтэнд	IBM pSeries 55A	POWER5+	2
сервисный узел			2
GPFS-серверы	IBM x3650	Intel Xeon	16

Для коммутации оптических линий служит высокопроизводительный свитч IBM Ethernet Switch B08R со 112 портами 10 Gb Ethernet: 64 порта используются для подключения узлов ввода-вывода вычислительной системы Blue Gene/P, 32 порта служат для подключения GPFS-серверов, управляющих параллельной файловой системой, к четырем портам подключены фронтэнды и сервисные узлы, остальные 12 портов используются для инфраструктурных нужд, либо зарезервированы для будущего использования. Гигабитный Ethernet сконмутирован на четыре 48-портовых свитча Cisco.

Для организации файлового хранилища используется 16 дисковых систем DS3512, каждая из которых включает по две дополнительных дисковых полки EXP3512. В основу сети хранения данных положены два 80-портовых коммутатора IBM System Storage SAN80B-4 Fibre Channel.

ОС вычислительного узла BlueGene P

• Compute Node Kernel (CNK)

- "linux-подобная" ОС
- Нет некоторых системных вызовов (fork() в основном). Ограниченная поддержка mmap(), execve().
- Минимальное ядро – обработка сигналов, передача системных вызовов к узлам ввода-вывода, старт-завершение задач, поддержка нитей
- Большинство приложений, которые работают под Linux, портируются на BG/P

Компиляторы Blue Gene

- IBM XL компиляторы (xlc, xlf77, xlf90)
- работают на front end узлах
- Fortran: mpixlf, mpixlf90, mpixlf95
- C: mpixlc
- C++: mpixlcxx
- обычно являются скриптами
- GNU компиляторы существуют, но малоэффективны: mpicc

Последовательная сложность (serial complexity) алгоритма - число операций, которые нужно выполнить при его последовательном исполнении.

Параллельная сложность (parallel complexity) алгоритма - число шагов, за которое можно выполнить данный алгоритм в предположении доступности неограниченного числа необходимых процессоров (функциональных устройств, вычислительных узлов, ядер и т.п.). Параллельная сложность алгоритма понимается как высота канонической ярусно-параллельной формы.

Ярусно-параллельная форма (ЯПФ) (parallel form) - это представление графа алгоритма, в котором:

- все вершины разбиты на перенумерованные подмножества ярусов;
- начальная вершина каждой дуги расположена на ярусе с номером меньшим, чем номер яруса конечной вершины;
- между вершинами, расположенными на одном ярусе, не может быть дуг.

Высота ЯПФ - это число ярусов. *Ширина* яруса - число вершин, расположенных на ярусе. *Ширина* ЯПФ - это максимальная ширина ярусов в ЯПФ.

Канонической ярусно-параллельной формой называется ЯПФ, высота которой на единицу больше длины критического пути, а все входные вершины расположены на первом ярусе. Для заданного графа его каноническая ЯПФ единственна. Высота канонической ЯПФ соответствует параллельной сложности алгоритма.

§ 4.2. Граф алгоритма и параллельные вычисления

Любая программа для "обыкновенного" компьютера описывает некоторое семейство алгоритмов. Выбор конкретного алгоритма при ее реализации определяется тем, как срабатывают условные операторы. Состав и порядок выполнения остальных операторов строго задается самой программой. Если в программе отсутствуют условные операторы, то программа изначально описывает только один алгоритм. В свою очередь, срабатывания условных операторов зависят исключительно от входных данных. Поэтому "обыкновенный" компьютер всегда выполняет какую-то последовательность действий, которая *однозначно* определена программой и входными данными. Более того, для одной и той же программы эта последовательность будет одной и той же на любых моделях "обыкновенного" компьютера. Тем самым заведомо однозначно определяется результат. Все это является, в конечном счете, следствием того, что в любом "обыкновенном" компьютере в любой момент времени может реализоваться только одна операция. Любая другая операция в этот момент может лишь проходить стадию подготовки к реализации.

Иначе обстоит дело на вычислительных системах параллельной архитектуры. Теперь в каждый момент времени может выполняться целый ансамбль операций, не зависящих друг от друга. На любой конкретной параллельной системе программа и входные данные однозначно определяют как состав ансамблей, так и их последовательность. Но на разных системах ансамбли и последовательности могут быть *разными*. Чтобы, тем не менее, гарантировать получение однозначного результата, порядок выполнения всей совокупности операций должен подчиняться некоторому условию.

Как на "обыкновенном", так и на параллельном компьютере решение задачи находится в результате выполнения множества простых операций. Все операции имеют небольшое число аргументов. Обычно их не более двух. В качестве конкретных значений аргументов операции берутся либо входные данные, либо результаты выполнения других операций. Соответствие, какие результаты какими являются аргументами, устанавливается разработчиком программы. Ясно, что любая операция — потребитель аргументов не может начать выполняться раньше, чем закончится выполнение всех операций — поставщиков для нее аргументов. Тем самым на множестве всех операций разработчик программы явно или неявно устанавливает *частичный* порядок. Для любых двух операций порядок определяет одну из возможностей: либо указывает, какая из операций должна выполняться раньше, либо констатирует, что обе операции могут выполняться независимо друг от друга. При одном и том же частичном порядке общий временной порядок всего множества операций может быть различным. Несколько позже мы покажем, что любой из этих порядков дает один и тот же результат. Поэтому сохранение частичного порядка, заданного программой, и есть то условие, выполнение которого гарантирует однозначность результата. В рамках одного и того же частичного порядка возможен выбор любой реализации.

Дадим сказанному следующую трактовку. Пусть при фиксированных входных данных программа описывает некоторый алгоритм. Построим ориентированный граф. В качестве вершин возьмем любое множество, например, множество точек арифметического пространства, на которое взаимнооднозначно отображается множество всех операций алгоритма. Возьмем любую пару вершин u , v . Допустим, что согласно описанному выше частично-порядку операция, соответствующая вершине u , должна поставлять аргумент операции, соответствующей вершине v . Тогда проведем дугу из вершины u в вершину v . Если соответствующие операции могут выполняться независимо друг от друга, дугу проводить не будем. В случае, когда аргументом операции является начальное данное или результат операции нигде не используется, возможны различные договоренности. Например, можно считать, что соответствующие дуги отсутствуют. Или предполагать, что все входные данные и результаты вводятся и выводятся через специальные устройства ввода/вывода. В этом случае вершины графа, отвечающие таким операциям, и только они не будут иметь соответственно входящие и выходящие дуги. Мы будем поступать в зависимости от обстоятельств. Построенный таким образом граф можно было бы назвать графом информационной зависимости реализации алгоритма при фиксированных входных данных. Однако такое название слишком громоздко. Поэтому будем называть его в дальнейшем просто *графом алгоритма*. Независимо от способа построения ориентированного графа, те его вершины, которые не имеют ни одной входящей или выходящей дуги, будем называть соответственно *входными* или *выходными* вершинами графа.

Это понятие требует некоторого пояснения. Граф алгоритма почти всегда зависит от входных данных. Даже если в программе отсутствуют условные операторы, он будет зависеть от размеров массивов, т. к. они определяют общее число выполняемых операций и, следовательно, общее число вершин графа. Так что в действительности граф алгоритма почти всегда есть *параметризованный* граф. От значений параметров зависит, конечно, не только число вершин, но и вся совокупность дуг. Если программа не имеет условных операторов, то как ее саму, так и описанный ею алгоритм будем называть *детерминированными*. В противном случае будем называть их *недетерминированными*. Имеется одно принципиальное отличие графа детерминированного алгоритма от графа недетерминированного алгоритма. Для детерминированного алгоритма всегда существует взаимно-однозначное соответствие между всеми операциями описывающей его программы и всеми вершинами графа алгоритма. Для недетерминированного алгоритма взаимно-однозначного соответствия при всех значениях параметров, т. е. входных данных, нет. Можно лишь утверждать, что в этом случае при каждом наборе значений параметров существует взаимно-однозначное соответствие между каким-то подмножеством всех операций программы и вершинами графа. Разным значениям параметров могут соответствовать разные подмножества.

В дальнейшем, если не сделаны дополнительные оговорки, мы будем рассматривать детерминированные алгоритмы и программы. Причин для введения этого ограничения довольно много. Во-первых, они устроены проще и, естественно, начать исследования именно с них. Во-вторых, класс детерминированных алгоритмов и программ весьма широк сам по себе. Далее, многие формально недетерминированные алгоритмы в действительности являются почти детерминированными. Например, в том случае, когда ветвления охватывают конечное число операций, не зависящее от значений входных данных. Такие ветвления можно погрузить в более крупные операции, имеющие, тем не менее, конечное число аргументов. И, наконец, если ветвления охватывают большие детерминированные фрагменты, то все равно исследование графа алгоритма сводится к исследованию этих фрагментов.

Введенный в рассмотрение граф алгоритма есть ориентированный ациклический мультиграф. Его ацикличность следует из того, что в любых программах реализуются только явные вычисления и никакая величина не может определяться через саму себя. Даже если в программе имеются рекурсивные выражения, то это всего лишь удобная форма описания однотипных вычислений. При каждом обращении к рекурсии на самом деле реализуются разные операции. В общем случае граф алгоритма есть мультиграф, т. е. две вершины могут быть связаны несколькими дугами. Это будет тогда, когда в качестве разных аргументов одной и той же операции используется одна и та же величина. Будем применять для обозначения графа стандартную символику $G = (V, E)$, где V — множество вершин, E — множество дуг графа G .

Итак, каждое описание алгоритма порождает ориентированный ациклический мультиграф. Верно и обратное. Если задан ориентированный ациклический мультиграф, то его всегда можно рассматривать как граф некоторого алгоритма. Для этого каждой вершине нужно поставить в соответствие любую однозначную операцию, имеющую столько аргументов, сколько дуг входит в вершину. Поэтому между алгоритмами и рассматриваемыми графами есть определенное взаимное соответствие.

Утверждение 4.1

Пусть задан ориентированный ациклический граф, имеющий n вершин. Существует число $s \leq n$, для которого все вершины графа можно так пометить одним из индексов $1, 2, \dots, s$, что если дуга из вершины с индексом i идет в вершину с индексом j , то $i < j$.

Выберем в графе любое число вершин, не имеющих предшествующих, и пометим их индексом 1. Удалим из графа помеченные вершины и инцидентные им дуги. Оставшийся граф также является ациклическим. Выберем в нем любое число вершин, не имеющих предшествующих и пометим их индексом 2. Продолжая этот процесс, в конце концов, исчерпаем весь граф. Так как при каждом шаге помечается не менее одной вершины, то число различных индексов не превышает числа вершин графа.

Отсюда следует, что никакие две вершины с одним и тем же индексом не связаны дугой. Минимальное число индексов, которым можно пометить все вершины графа, на 1 больше длины его критического пути. И, наконец, для любого целого числа s , не превосходящего общего числа вершин, но большего длины критического пути, существует такая разметка вершин графа, при которой используются все s индексов.

Граф, размеченный в соответствии с утверждением 4.1, называется *строгой параллельной формой графа*. Если в параллельной форме некоторая вершина помечена индексом k , то это означает, что длины всех путей, оканчивающихся в данной вершине, меньше k . Существует строгая параллельная форма, при которой максимальная из длин путей, оканчивающихся в вершине с индексом k , равна $k - 1$. Для этой параллельной формы число используемых индексов на 1 больше длины критического пути графа. Среди подобных параллельных форм существует такая, в которой все входные вершины находятся в группе с одним индексом, равным 1. Эта строгая параллельная форма называется *канонической*. Для заданного графа его каноническая параллельная форма *единственна*. Группа вершин, имеющих одинаковые индексы, называется *ярусом* параллельной формы, а число вершин в группе — *шириной* яруса. Число ярусов в параллельной форме называется *высотой* параллельной формы, а максимальная ширина ярусов — ее *шириной*. Параллельная форма минимальной высоты называется *максимальной*. Слово "максимальная" здесь означает, что в этой параллельной форме в ярусах нахо-

дится в определенном смысле максимальное число вершин. Все канонические параллельные формы являются максимальными.

Заметим, что формулировка утверждения 4.1 остается в силе, если неравенство $i < j$ заменить неравенством $i \leq j$. Однако ни одно из следствий уже выполняться не будет. Граф, размеченный таким образом, называется *обобщенной параллельной формой*. Соответственно вводятся понятия обобщенный ярус, ширина обобщенного яруса и т. п. В исследованиях, связанных с параллельными формами, обобщенные параллельные формы играют роль замыкания множества строгих параллельных форм.

Теперь допустим, что алгоритм реализуется на синхронном компьютере, "обыкновенном" или параллельном. Пусть для простоты все операции выполняются за одно и то же время, равное 1. Пренебрежем всеми остальными временными потерями и будем считать, что операции начинают выполняться сразу, как только оказываются готовыми их аргументы, без каких-либо простоев. Предположим, что алгоритм начинает реализовываться в нулевой момент времени. Тогда каждой операции можно присвоить индекс, равный моменту окончания ее выполнения. Если эти индексы перенести на соответствующие вершины графа алгоритма, то ясно, что мы получим его строгую параллельную форму. При этом номер яруса означает момент времени, когда заканчивают выполняться соответствующие ему операции. Все операции одного яруса выполняются независимо друг от друга, а число этих операций совпадает с шириной яруса. Высота параллельной формы есть время реализации алгоритма и т. п. Совершенно очевидна связь между различными синхронными реализациями алгоритма и различными строгими параллельными формами его графа. В частности, если алгоритм реализуется на "обыкновенном" компьютере, то этому соответствует параллельная форма, в которой все ярусы имеют ширину, равную 1. В данном случае параллельная форма называется *линейной* и говорят, что граф упорядочен *линейно*.

Параллельные формы графа алгоритма удобно изображать на листе бумаги, если ось абсцисс считать осью времени, а вершины откладывать по оси ординат соответственно времени окончания выполнения операций. Если построить аналогичный чертеж для любого реального или гипотетического компьютера, синхронного или асинхронного, то видно, что в проведенных рассуждениях мало что меняется. Лишь ярусы параллельной формы будут размываться во времени. Но как бы они не размывались, их всегда можно привести к синхронной форме с единичным временем выполнения операций, перемещая вершины и соответствующие им дуги параллельно оси абсцисс. Для этого отметим не только моменты окончания выполнения операций, но и моменты их начала. Ярусы параллельной формы будем строить следующим образом. В первый ярус объединим максимальное число вершин, не имеющих входящих дуг и соответствующих операциям с непустым пересечением временных интервалов их выполнения. Эти вершины заведе-

мо не связаны друг с другом какими-либо дугами. Удалим из графа алгоритма вершины первого яруса и инцидентные им дуги. Для оставшейся части графа выделим аналогичную группу вершин и будем считать ее вторым ярусом параллельной формы и т. д.

Таким образом, между различными реализациями одного и того же алгоритма на различных компьютерах и различными параллельными формами графа алгоритма существует определенное взаимное соответствие. Зная граф алгоритма и его параллельные формы, можно понять, каков запас параллелизма в алгоритме и как его лучше реализовать на конкретном компьютере параллельной архитектуры. Вот почему мы будем уделять очень много внимания как построению графа алгоритма, так и нахождению его параллельных форм.

В дальнейшем терминологию, относящуюся к параллельным формам графа алгоритма, будем часто переносить и на сам алгоритм, говоря о параллельной форме алгоритма, ярусах алгоритма, высоте параллельной формы алгоритма. Минимальную высоту параллельных форм алгоритма будем называть высотой алгоритма и т. д. Другими словами, будем сразу считать вершинами графа операции самого алгоритма, а дугами — отношения частичного порядка между операциями. Это не дает никаких новых знаний по существу, но позволяет избегать громоздких фраз за счет исключения длинных последовательностей слов типа "множество операций, соответствующих такому-то множеству вершин графа алгоритма". Обычным же графом алгоритма удобнее пользоваться в иллюстративных рисунках и чертежах.

Наконец, покажем, что независимо от того, какая параллельная форма алгоритма реализуется на компьютере, результат реализации будет одним и тем же.

Утверждение 4.2

Пусть при выполнении операции ошибки округления определяются только значениями аргументов. Тогда при одних и тех же входных данных все реализации алгоритма, соответствующие одному и тому же частичному порядку на операциях, дают один и тот же результат, включая всю совокупность ошибок округления.

Рассмотрим каноническую параллельную форму алгоритма. Операции любого яруса не зависят друг от друга. Аргументами операций 1-го яруса являются только входные данные. Они не зависят от времени выполнения операций. Поэтому все операции 1-го яруса дают результаты, не зависящие от того, когда реально выполняются эти операции. Аргументами операций 2-го яруса являются или входные данные, или результаты выполнения операций 1-го яруса. В соответствии со сказанным, все они не зависят от времени выполнения операций. Поэтому операции 2-го яруса также дают результаты, не зависящие от того, когда реально выполняются эти операции. Продолжая последовательно по ярусам это доказательство, убеждаемся в справедливости утверждения.

Заметим, что та последовательность выполнения операций, которая диктуется программой, записанной на последовательном языке, определяет на множестве операций линейный порядок. Конечно, он сохраняет и частичный порядок, о котором говорилось выше. Но в общем случае на множестве операций существуют и другие линейные порядки, сохраняющие тот же частичный порядок. Согласно утверждению 4.2, все они будут давать один и тот же результат. Следовательно, фиксация последовательного порядка выполнения операций при задании алгоритма, вообще говоря, является избыточным действием. Значительно "экономичнее" задавать граф алгоритма или какую-нибудь его строгую параллельную форму, лучше всего — каноническую. Тем более, что для реализации алгоритмов на параллельных вычислительных системах нужна именно такая информация. Однако за многие годы существования "обыкновенных" компьютеров накопилось столько много прикладного программного обеспечения на последовательных языках, что не может даже идти речи о его переписывании вручную. Поэтому необходимо развивать теорию и строить инструментальные системы, помогающие очищать записи алгоритмов от последовательных "излишеств", что, в конечном счете, и сводится к построению графа алгоритма и нахождению его параллельных форм. Как мы увидим в дальнейшем, это очень непростая задача.

По нашему мнению, граф алгоритма представляет самое основное ядро идеи разработчика, содержащейся в записи алгоритма. Разработчик алгоритма мог знать это ядро. Вполне возможно, что он был вынужден замаскировать его из-за того, что язык описания алгоритма не давал возможность эффективно изобразить данное ядро. Но как показывает практика, в подавляющем большинстве случаев это ядро алгоритма для разработчика неизвестно. Более того, как правило, он даже и не думает о его существовании. Все становится понятным, если принять во внимание, что граф алгоритма есть не просто ядро алгоритма, а является его *информационным ядром*. До недавнего времени знания о том, как распространяется информация при реализации алгоритмов, не имели практической ценности. Поэтому неудивительно, что не было особого стремления их получать. Появление параллельных вычислительных систем сделало эти знания исключительно нужными. Вот они и стали развиваться.

Билет 35. Информационный граф и ресурс параллелизма алгоритмов.

Граф алгоритма - ориентированный **граф**, состоящий из вершин, соответствующих операциям, и направленных **дуг**, соответствующих передаче **данных** (результаты одних операций передаются в качестве **аргументов** другим **операциям**) между ними.

Не следует путать его с **графом управления программы** и тем более с её **блок-схемой**.

Активно используется при исследованиях скрытого **параллелизма** в **алгоритмах**, записанных на традиционных языках программирования последовательного типа.

Особенностями графа алгоритма являются:

- его **ацикличность**;
- невозможность, в общем случае, его описания простым перечислением, в силу того, что его составляющие могут зависеть от внешних параметров решаемой им задачи (например, алгоритм, реализующий **метод Гаусса** — от размера матрицы).

Algo-Wiki:

Интересных вариантов для отражения информационной структуры алгоритмов много. Для каких-то алгоритмов нужно показать максимально подробную структуру, а иногда важнее макроструктура. Много информации несут разного рода проекции информационного графа, выделяя его регулярные составляющие и одновременно скрывая несущественные детали. Иногда оказывается полезным показать последовательность в изменении графа при изменении значений внешних переменных (например, размеров матриц): мы часто ожидаем "подобное" изменение информационного графа, но это изменение не всегда очевидно на практике.

В целом, задача изображения графа алгоритма весьма нетривиальна. Начнем с того, что это потенциально бесконечный граф, число вершин и дуг которого определяется значениями внешних переменных, а они могут быть весьма и весьма велики. В такой ситуации, как правило, спасают упомянутые выше соображения подобия, делающие графы для разных значений внешних переменных "похожими": почти всегда достаточно привести лишь один граф небольшого размера, добавив, что графы для остальных значений будут устроены "точно также". На практике, увы, не всегда все так просто, и здесь нужно быть аккуратным.

Далее, граф алгоритма - это потенциально многомерный объект. Наиболее естественная система координат для размещения вершин и дуг информационного графа опирается на структуру вложенности циклов в реализации алгоритма. Если глубина вложенности циклов не превышает трех, то и граф размещается в привычном трехмерном пространстве, однако для более сложных циклических конструкций с глубиной вложенности 4 и больше необходимы специальные методы представления и изображения графов.

Но в любом случае нужно не забывать главную задачу данного раздела - показать информационную структуру алгоритма так, чтобы стали понятны все его ключевые особенности, особенности параллельной структуры, особенности множеств дуг, участки регулярности и, напротив, участки с недерминированной структурой, зависящей от входных данных.

1.8 Ресурс параллелизма алгоритма

Здесь приводится оценка **параллельной сложности** алгоритма: числа шагов, за которое можно выполнить данный алгоритм в предположении доступности неограниченного числа

необходимых процессоров (функциональных устройств, вычислительных узлов, ядер и т.п.). Параллельная сложность алгоритма понимается как высота канонической ярусно-параллельной формы ^[1]. Необходимо указать, в терминах каких операций дается оценка. Необходимо описать сбалансированность параллельных шагов по числу и типу операций, что определяется шириной ярусов канонической ярусно-параллельной формы и составом операций на ярусах.

Параллелизм в алгоритме часто имеет естественную иерархическую структуру. Этот факт очень полезен на практике, и его необходимо отразить в описании. Как правило, подобная иерархическая структура параллелизма хорошо отражается в последовательной реализации алгоритма через циклический профиль результирующей программы (конечно же, с учетом графа вызовов), поэтому циклический профиль (п.1.5) вполне может быть использован и для отражения ресурса параллелизма.

Для описания ресурса параллелизма алгоритма (ресурса параллелизма информационного графа) необходимо указать ключевые параллельные ветви в терминах *конечного* и *массового* параллелизма. Далеко не всегда ресурс параллелизма выражается просто, например, через *координатный параллелизм* или, что то же самое, через независимость итераций некоторых циклов (да-да-да, циклы - это понятие, возникающее лишь на этапе реализации, но здесь все так связано... В данном случае, координатный параллелизм означает, что информационно независимые вершины лежат на гиперплоскостях, перпендикулярных одной из координатных осей). С этой точки зрения, не менее важен и ресурс *скошенного параллелизма*. В отличие от координатного параллелизма, скошенный параллелизм намного сложнее использовать на практике, но знать о нем необходимо, поскольку иногда других вариантов и не остается: нужно оценить потенциал алгоритма, и лишь после этого, взвесив все альтернативы, принимать решение о конкретной параллельной реализации.

Ярусно-параллельная форма (ЯПФ) (parallel form) - это представление графа алгоритма, в котором:

- все вершины разбиты на перенумерованные подмножества ярусов;
- начальная вершина каждой дуги расположена на ярусе с номером меньшим, чем номер яруса конечной вершины;
- между вершинами, расположенными на одном ярусе, не может быть дуг.

Высота ЯПФ - это число ярусов. *Ширина* яруса - число вершин, расположенных на ярусе. *Ширина* ЯПФ - это максимальная ширина ярусов в ЯПФ.

Канонической ярусно-параллельной формой называется ЯПФ, высота которой на единицу больше длины критического пути, а все входные вершины расположены на первом ярусе. Для заданного графа его каноническая ЯПФ единственна. Высота канонической ЯПФ соответствует параллельной сложности алгоритма.

Ярусно-параллельная форма графа (ЯПФ) — деление вершин ориентированного ациклического графа на перенумерованные подмножества V_i такие, что, если дуга e идет от вершины $v_1 \in V_j$ к вершине $v_2 \in V_k$, то обязательно $j < k$.

Каждое из множеств V_i называется **ярусом** ЯПФ, i — его **номером**, количество вершин $|V_i|$ в ярусе — его **шириной**. Количество ярусов в ЯПФ называется её **высотой**, а максимальная ширина её ярусов — **шириной ЯПФ**.

Для ЯПФ графа алгоритма важным является тот факт, что операции, которым соответствуют вершины одного яруса, не зависят друг от друга (не находятся в **отношении связи**), и поэтому заведомо существует параллельная реализация алгоритма, в которой они

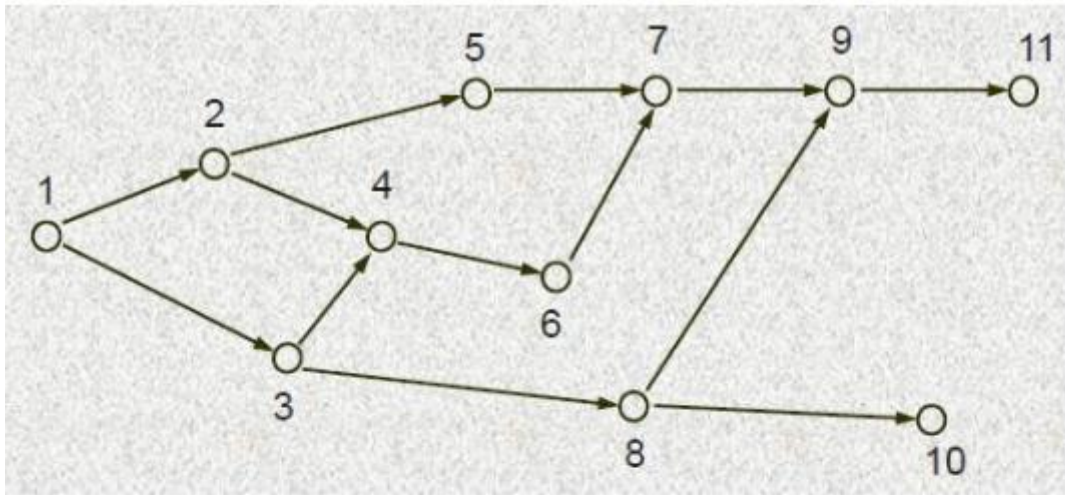
могут быть выполнены параллельно на разных устройствах **вычислительной системы**. Поэтому ЯПФ **графа алгоритма** может быть использована для подготовки такой параллельной реализации **алгоритма**.

Минимальной высотой всех возможных ЯПФ графа является его **критический путь**. Построение ЯПФ с высотой, меньшей критического пути, невозможно.

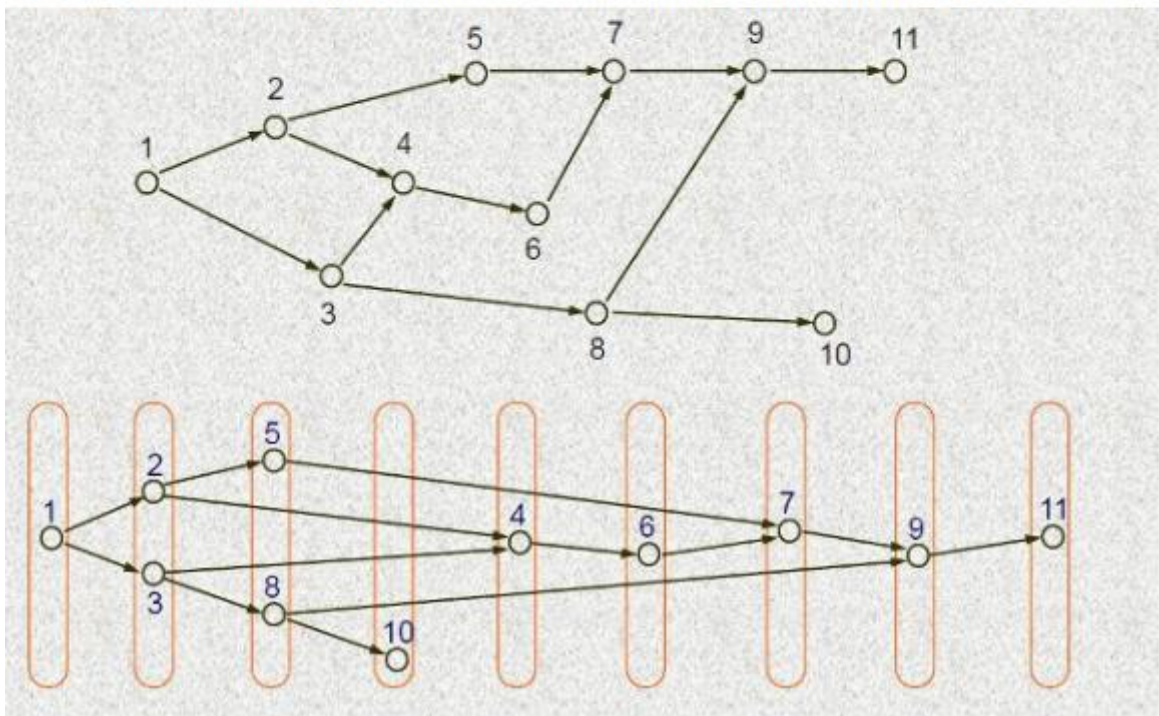
Критический путь графа — путь максимальной длины в ориентированном ациклическом **графе**.

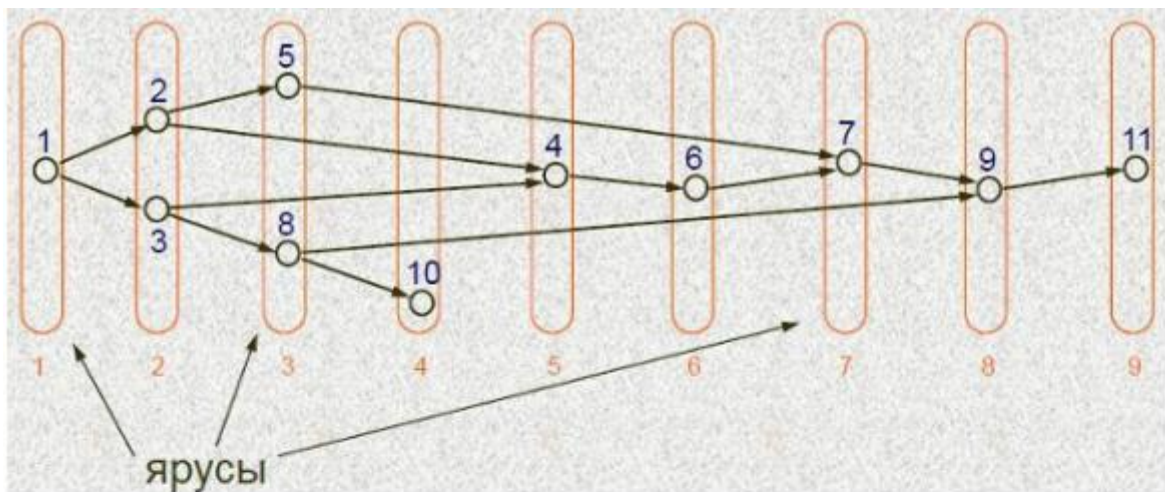
Его длина является минимальной из всех возможных высот у **ярусно-параллельной формы** данного ациклического графа.

Параллельная сложность (parallel complexity) алгоритма - число шагов, за которое можно выполнить данный алгоритм в предположении доступности неограниченного числа необходимых процессоров (функциональных устройств, вычислительных узлов, ядер и т.п.). Параллельная сложность алгоритма понимается как высота канонической **ярусно-параллельной формы**.

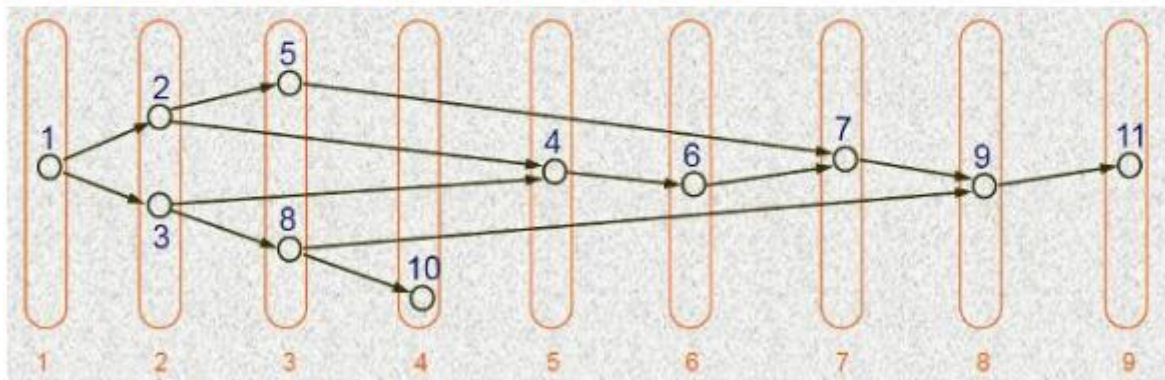


Как определить и сделать понятным ресурс параллелизма в графе алгоритма (в программе, в алгоритме) ?





- начальная вершина каждой дуги расположена на ярусе с номером меньшим, чем номер яруса конечной вершины,
- между вершинами, расположенными на одном ярусе, не может быть дуг.

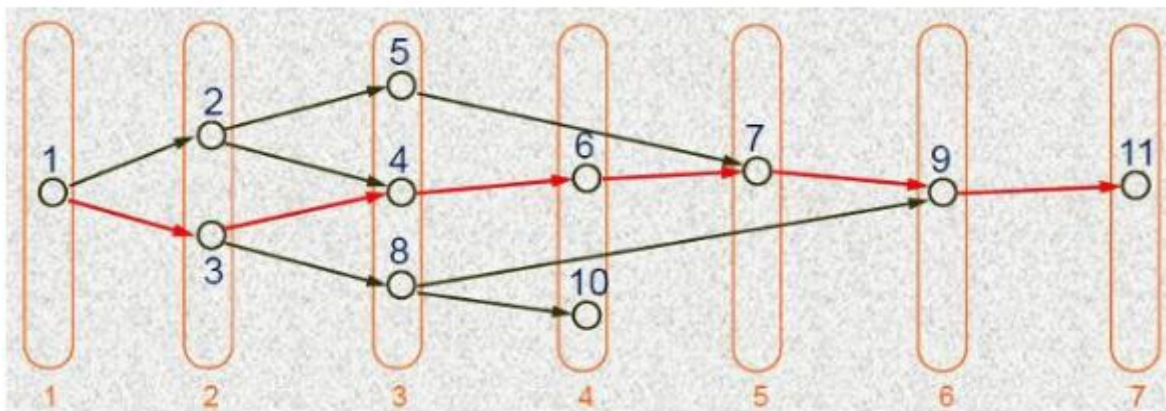
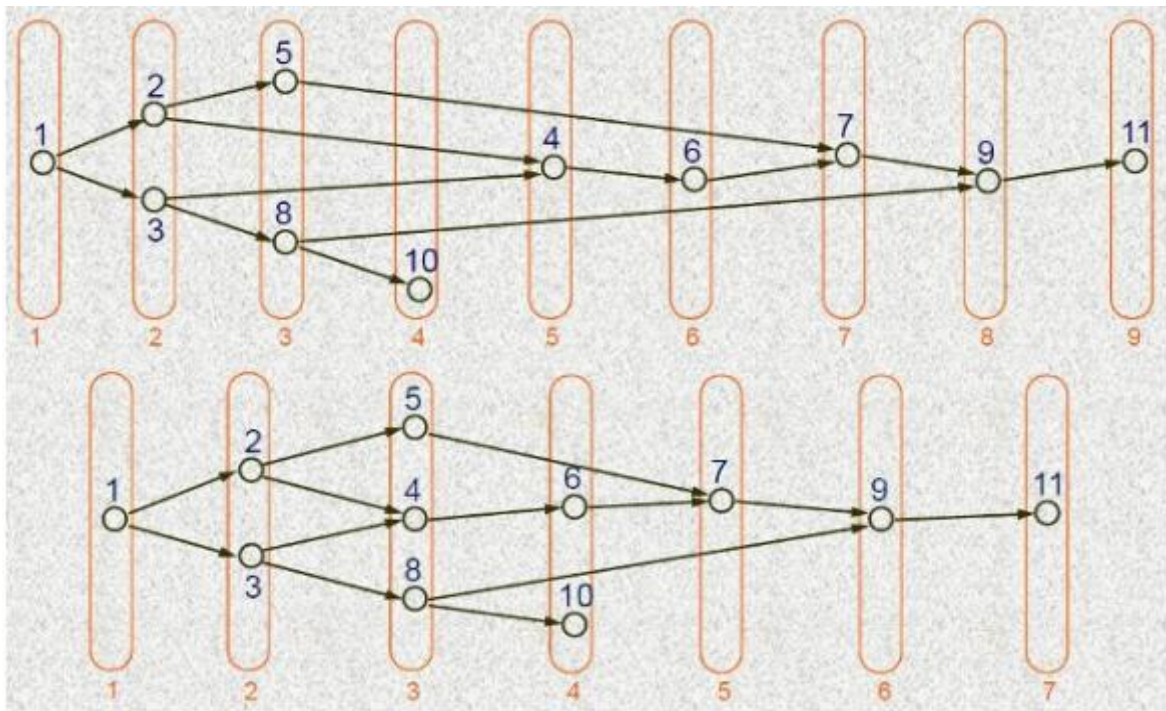


Высота ЯПФ – это число ярусов,

Ширина яруса – число вершин, расположенных на ярусе,

Ширина ЯПФ – это максимальная ширина ярусов в ЯПФ.

Высота ЯПФ = сложность параллельной реализации алгоритма/программы.



Высота канонической ЯПФ = длине критического пути + 1.

```
for( i = 0; i < n; ++i)
  for( j = 0; j < m; ++j)
    A[i][j] = A[i][j-1] + C[i][j]*x;
```

На примере Разложения Холецкого (метод квадратного корня)

1.7 Информационный граф

Опишем [граф алгоритма](#)^{[9][10][11]} как аналитически, так и в виде рисунка.

Граф алгоритма состоит из трёх групп вершин, расположенных в целочисленных узлах трёх областей разной размерности.

Первая группа вершин расположена в одномерной области, соответствующая ей операция вычисляет функцию SQRT. Единственная координата каждой из вершин i меняется в диапазоне от 1 до n , принимая все целочисленные значения.

Аргумент этой функции

- при $i = 1$ — элемент *входных данных*, а именно a_{11} ;
- при $i > 1$ — результат срабатывания операции, соответствующей вершине из третьей группы, с координатами $i - 1, i, i - 1$.

Результат срабатывания операции является *выходным данным* l_{ii} .

Вторая группа вершин расположена в двумерной области, соответствующая ей операция a/b . Естественно введённые координаты области таковы:

- i — меняется в диапазоне от 1 до $n - 1$, принимая все целочисленные значения;
- j — меняется в диапазоне от $i + 1$ до n , принимая все целочисленные значения.

Аргументы операции следующие:

- a :
 - при $i = 1$ — элементы *входных данных*, а именно a_{j1} ;
 - при $i > 1$ — результат срабатывания операции, соответствующей вершине из третьей группы, с координатами $i - 1, j, i - 1$;
- b — результат срабатывания операции, соответствующей вершине из первой группы, с координатой i .

Результат срабатывания операции является *выходным данным* l_{ji} .

Третья группа вершин расположена в трёхмерной области, соответствующая ей операция $a - b * c$. Естественно введённые координаты области таковы:

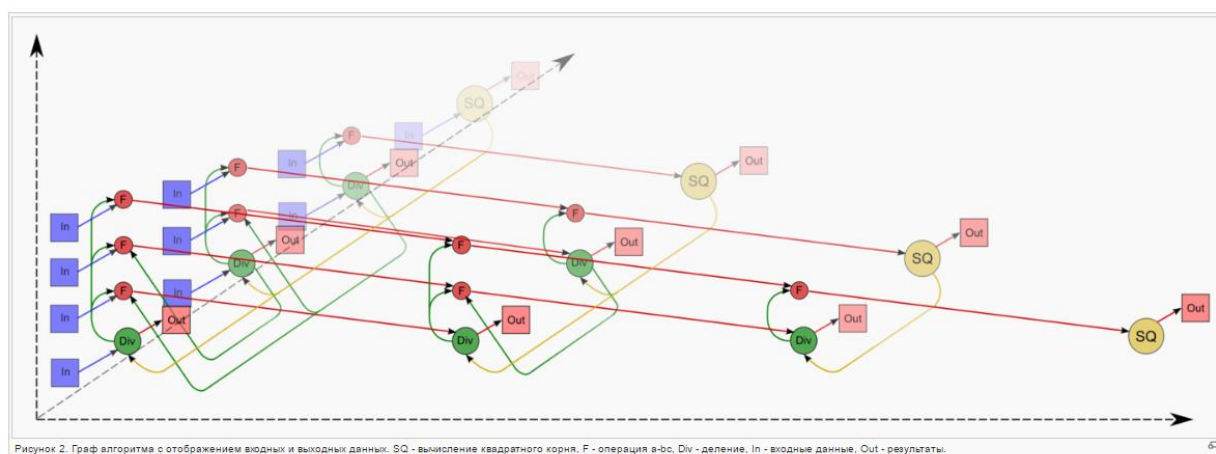
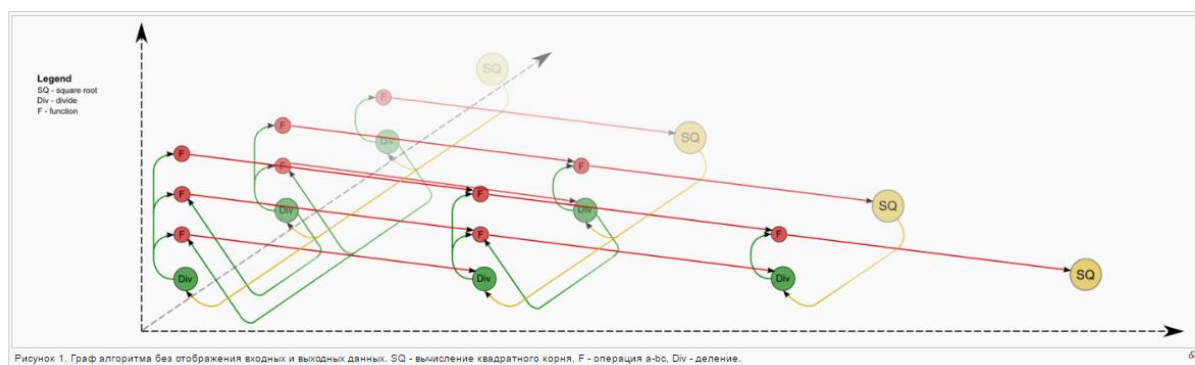
- i — меняется в диапазоне от 2 до n , принимая все целочисленные значения;
- j — меняется в диапазоне от i до n , принимая все целочисленные значения;
- p — меняется в диапазоне от 1 до $i - 1$, принимая все целочисленные значения.

Аргументы операции следующие:

- a :
 - при $p = 1$ элемент *входных данных* a_{ji} ;
 - при $p > 1$ — результат срабатывания операции, соответствующей вершине из третьей группы, с координатами $i, j, p - 1$;
- b — результат срабатывания операции, соответствующей вершине из второй группы, с координатами p, i ;
- c — результат срабатывания операции, соответствующей вершине из второй группы, с координатами p, j ;

Результат срабатывания операции является *промежуточным данным* алгоритма.

Описанный граф можно посмотреть на рис.1 и рис.2, выполненных для случая $n = 4$. Здесь вершины первой группы обозначены жёлтым цветом и буквосочетанием sq, вершины второй — зелёным цветом и знаком деления, третьей — красным цветом и буквой f. Вершины, соответствующие операциям, производящим выходные данные алгоритма, выполнены более крупно. Дублирующие друг друга дуги даны как одна. На рис.1 показан граф алгоритма согласно классическому определению, на рис.2 к графу алгоритма добавлены вершины, соответствующие входным (обозначены синим цветом) и выходным (обозначены розовым цветом) данным.



1.8 Ресурс параллелизма алгоритма

Для разложения матрицы порядка n методом Холецкого в параллельном варианте требуется последовательно выполнить следующие ярусы:

- n ярусов с вычислением квадратного корня (единичные вычисления в каждом из ярусов),
- $n - 1$ ярус делений (в каждом из ярусов линейное количество делений, в зависимости от яруса — от 1 до $n - 1$),
- по $n - 1$ ярусов умножений и сложений/вычитаний (в каждом из ярусов — квадратичное количество операций, от 1 до $\frac{n^2 - n}{2}$).

Таким образом, в параллельном варианте, в отличие от последовательного, вычисления квадратных корней и делений будут определять довольно значительную долю требуемого времени. При реализации на конкретных архитектурах наличие в отдельных ярусах [ЯПФ](#) отдельных вычислений квадратных корней может породить и другие проблемы. Например, при реализации на ПЛИСах остальные вычисления (деления и тем более умножения и сложения/вычитания) могут быть конвейеризованы, что даёт экономию и по ресурсам на программируемых платах; вычисления же квадратных корней из-за их изолированности приведут к занятию ресурсов на платах, которые будут простаивать большую часть времени. Таким образом, общая экономия в 2 раза, из-за которой метод Холецкого предпочитают в случае симметричных задач тому же методу Гаусса, в параллельном случае уже имеет место вовсе не по всем ресурсам, и главное - не по требуемому времени.

При этом использование режима накопления требует совершения умножений и вычитаний в режиме двойной точности, а в параллельном варианте это означает, что практически все промежуточные вычисления для выполнения метода Холецкого в режиме накопления должны быть

двойной точности. В отличие от последовательного варианта это означает увеличение требуемой памяти почти в 2 раза.

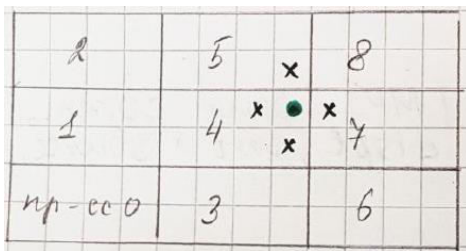
При классификации по высоте ЯПФ, таким образом, метод Холецкого относится к алгоритмам со сложностью $O(n)$. При классификации по ширине ЯПФ его сложность будет $O(n^2)$.

Билет 36. Методы организация параллельных вычислений при суперкомпьютерном решении сеточных задач.

Рассмотрим конкретную задачу: уравнение Лапласа на прямоугольнике.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, x \in [0, 1], u(x, 0) = \sin(\pi x), u(x, 1) = \sin(\pi x)e^{-x}, u(0, y) = u(1, y) = 0.$$

Рассмотрим 5-точечный шаблон: $u_{i,j}^{n+1} \cong \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n}{4}$.



Создается декартова топология (механизм сопоставления процессами некоторого коммуникатора альтернативной схемы адресации; виртуальный):

Необходим обмен данными на границах, будем использовать следующие функции MPI.

Создание топологии:

1. Создание топологии:

```
int MPI_Cart_create(MPI_Comm oldcomm, int ndims, int *dims, int *periods, int reorder, MPI_Comm *cartcomm)
```

- oldcomm — исходный коммуникатор;
- ndims — размерность декартовой решетки;
- dims — массив длины ndims, задает количество процессов в каждом измерении решетки;
- periods — массив длины ndims, определяет, является ли решетка периодической вдоль каждого измерения;
- reorder — параметр допустимости изменения нумерации процессов (true => разрешено менять порядок нумерации процессов для оптимизации распределения по физическим процессорам);
- cartcomm — создаваемый коммуникатор с декартовой топологией процессов. Должна быть вызвана всеми процессами коммуникатора oldcomm.

2. Определение декартовых координат процесса по его рангу:

```
int MPI_Cart_coords(MPI_Comm comm, int rank, int ndims, int *coords)
```

- comm — коммуникатор с топологией решетки;
- rank — ранг процесса, для которого определяются декартовы координаты;
- ndims — размерность решетки;
- coords — возвращаемые функцией декартовы координаты процесса.

3. Определение ранга процесса по его декартовым координатам:

```
int MPI_Cart_rank(MPI_Comm comm, int *coords, int *rank),
```

- comm — коммуникатор с топологией решетки;
- coords — декартовы координаты процесса ;
- rank — возвращаемый функцией ранг процесса.

4. Разбиение решетки на подрешетки меньшей размерности:

`int MPI_Cart_sub(MPI_Comm comm, int *subdims, MPI_Comm *newcomm),`

- `comm` — исходный коммуникатор с топологией решетки;
- `subdims` — массив для указания, какие измерения должны остаться в создаваемой подрешетке;
- `newcomm` — создаваемый коммуникатор с подрешеткой.

5. Поддержку процедуры последовательной передачи данных по одному из измерений решетки. В зависимости от периодичности измерения решетки, по которому выполняется сдвиг, различаются два типа данной операции:

`int MPI_Cart_shift(MPI_Comm comm, int dir, int disp, int *source, int *dst),`

- `comm` — коммуникатор с топологией решетки;
- `dir` — номер измерения, по которому выполняется сдвиг;
- `disp` — величина сдвига (при отрицательных значениях сдвиг производится к началу измерения);
- `source` — ранг процесса, от которого должны быть получены данные;
- `dst` — ранг процесса, которому должны быть отправлены данные.

Получение номеров посылающего (`source`) и принимающего (`dst`) процессов для осуществления сдвига вдоль измерения `dir` ($\in [0, n - 1]$ для n -мерной решетки) на величину `disp`.

6. Получение информации о топологии по коммуникатору и числу измерений:

`MPI_Cart_get(MPI_Comm comm, int ndims, int *dims, int *periods, int *coords)`

- `comm` - коммуникатор с декартовой топологией;
- `ndims` - число измерений;
- `dims` - массив размера `ndims`, в котором возвращается число процессов вдоль каждого измерения;
- `periods` - логический массив размера `ndims`, в котором возвращаются наложенные граничные условия; (`true` - периодические, `false` - непериодические);
- `coords` - координаты в декартовой сетке вызывающего процесса.

Блокирующие передачи:

1. `int MPI_Send(void* buf, int count, MPI_Datatype datatype, int dest, int msgtag, MPI_Comm comm)`

- `buf` - адрес начала буфера отправки сообщения
- `count` - число передаваемых элементов в сообщении
- `datatype` - тип передаваемых элементов
- `dest` - номер процесса-получателя
- `msgtag` - идентификатор сообщения
- `comm` - идентификатор группы

Блокирующая отправка сообщения с идентификатором `msgtag`, состоящего из `count` элементов типа `datatype`, процессу с номером `dest`. Все элементы сообщения расположены подряд в буфере `buf`. Значение `count` может быть нулем. Тип

передаваемых элементов datatype должен указываться с помощью
предопределенных констант типа. Разрешается передавать сообщение самому себе.

2. int MPI_Recv(void* buf, int count, MPI_Datatype datatype, int source, int msgtag,
MPI_comm comm, MPI_Status *status)

- OUT buf - адрес начала буфера приема сообщения
- count - максимальное число элементов в принимаемом сообщении
- datatype - тип элементов принимаемого сообщения
- source - номер процесса-отправителя
- msgtag - идентификатор принимаемого сообщения
- comm - идентификатор группы
- OUT status - параметры принятого сообщения

Коллективные операции

Основные особенности и отличия от коммуникаций типа "точка-точка":

- на прием и/или передачу работают одновременно ВСЕ задачи-абоненты указываемого коммуникатора;
- коллективная функция выполняет одновременно и прием, и передачу; она имеет большое количество параметров, часть которых нужна для приема, а часть для передачи; в разных задачах та или иная часть игнорируется;
- как правило, значения ВСЕХ параметров (за исключением адресов буферов) должны быть идентичными во всех задачах;
- MPI назначает идентификатор для сообщений автоматически;
- кроме того, сообщения передаются не по указываемому коммуникатору, а по временному коммуникатору-дубликату; тем самым потоки данных коллективных функций надежно изолируются друг от друга и от потоков, созданных функциями "точка-точка".

1. int MPI_Bcast(void *buf, int count, MPI_Datatype datatype, int source, MPI_Comm comm)

- OUT buf - адрес начала буфера посылки сообщения
- count - число передаваемых элементов в сообщении
- datatype - тип передаваемых элементов
- source - номер рассылающего процесса
- comm - идентификатор группы

Рассылка сообщения от процесса source всем процессам, включая рассылающий процесс. При возврате из процедуры содержимое буфера buf процесса source будет скопировано в локальный буфер процесса. Значения параметров count, datatype и source должны быть одинаковыми у всех процессов.

2. int MPI_Gather(void *sbuf, int scount, MPI_Datatype stype, void *rbuf, int rcount, MPI_Datatype rtype, int dest, MPI_Comm comm)

- sbuf - адрес начала буфера посылки
- scount - число элементов в посылаемом сообщении
- stype - тип элементов отсылаемого сообщения
- OUT rbuf - адрес начала буфера сборки данных

- rcount - число элементов в принимаемом сообщении
- rtype - тип элементов принимаемого сообщения
- dest - номер процесса, на котором происходит сборка данных
- comm - идентификатор группы
- OUT ierror - код ошибки

Сборка данных со всех процессов группы в один массив rbuf процесса dest. Длина блоков одинаковая, Объединение в порядке увеличения номеров-отправителей.

3. int MPI_AllReduce(void *sbuf, void *rbuf, int count, MPI_Datatype datatype, MPI_Op op, MPI_Comm comm)

- sbuf - адрес начала буфера для аргументов
- OUT rbuf - адрес начала буфера для результата
- count - число аргументов у каждого процесса
- datatype - тип аргументов
- op - идентификатор глобальной операции
- comm - идентификатор группы

Выполнение count глобальных операций op с возвратом count результатов во всех процессах в буфере rbuf. Операция выполняется независимо над соответствующими аргументами всех процессов. Значения параметров count и datatype у всех процессов должны быть одинаковыми.

- Идентификаторы глобальных операций:
MPI_MAX и MPI_MIN ищут поэлементные максимум и минимум;
MPI_SUM вычисляет сумму векторов;
MPI_PROD вычисляет поэлементное произведение векторов;
MPI_LAND, MPI_BAND, MPI_LOR, MPI_BOR, MPI_LXOR, MPI_BXOR - логические и двоичные операции И, ИЛИ, исключающее ИЛИ;
MPI_MAXLOC, MPI_MINLOC - поиск индексированного минимума/максимума.

4. int MPI_Reduce(void *sbuf, void *rbuf, int count, MPI_Datatype datatype, MPI_Op op, int root, MPI_Comm comm)

- sbuf - адрес начала буфера для аргументов
- OUT rbuf - адрес начала буфера для результата
- count - число аргументов у каждого процесса
- datatype - тип аргументов
- op - идентификатор глобальной операции
- root - процесс-получатель результата
- comm - идентификатор группы

Функция аналогична предыдущей, но результат будет записан в буфер rbuf только у процесса root.

Билет 37. Суперкомпьютерное моделирование турбулентных течений.

(П.Брэдшоу, 1971) : «Турбулентность – это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения. Она является обычным состоянием движущейся жидкости, за исключением течений при малых числах Рейнольдса».

(Р.Фейнман, 1968) : «Турбулентность – это последняя неразрешенная фундаментальная проблема классической физики»

Фольклор: «Турбулентность похожа на порнографию – ей трудно дать определение, но как только вы ее увидите – тут же узнаете»

СВОЙСТВА ИДЕАЛЬНОГО DNS – АЛГОРИТМА

- Полное разрешение всего спектра турбулентных пульсаций
- Отсутствие настроечных параметров
- Применимость в областях сложной формы
- Робастность
- Консервативность
- Масштабируемость
- Мультифизичность

Основная верификационная задача – моделирование однородной изотропной турбулентности

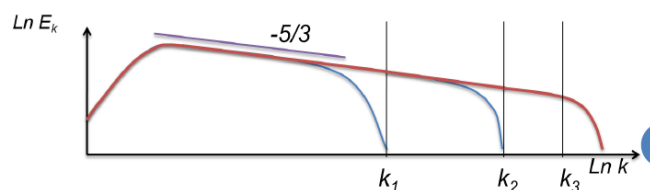
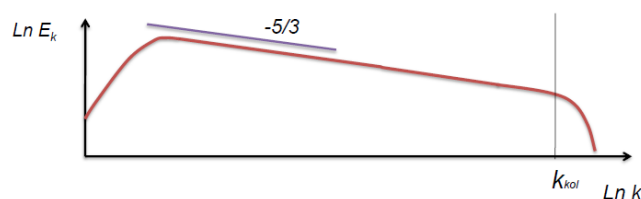
Наиболее простой вид турбулентного движения. Предложен Тейлором в 1945 году. Позволяет изучить ряд свойств, присущих всем турбулентным течениям.

Мелкомасштабная турбулентность в значительной степени однородна и изотропна. Причина – каскадный перенос энергии.

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \sim \frac{1}{k_{\varepsilon}}$$



«Идеальный» LES – идеальный DNS при неполном разрешении спектра пульсаций



СВОЙСТВА ИДЕАЛЬНОГО LES - АЛГОРИТМА

- Отсутствие настроечных параметров при неполном разрешении спектра турбулентных пульсаций
- Применимость в областях сложной формы

- Робастность
- Консервативность
- Масштабируемость
- Мультифизичность



СХЕМА «КАБАРЕ» ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕГО
УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

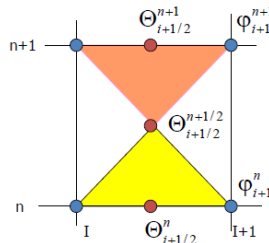
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q$$

Вычисление промежуточных «консервативных»
переменных $\Theta_{i+1/2}^{n+1/2}$

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \Theta_{i+1/2}^n}{\tau/2} + c \cdot \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} = Q;$$

Вычисление новых «поточных»
переменных φ_{i+1}^{n+1}

$$\varphi_{i+1}^{n+1} = 2 \cdot \Theta_{i+1/2}^{n+1/2} - \varphi_i^n \quad c > 0$$



Вычисление «консервативных» переменных
на новом временном слое:

$$\frac{\Theta_{i+1/2}^{n+1} - \Theta_{i+1/2}^{n+1/2}}{\tau/2} + c \cdot \frac{\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_i^{n+1}}{h} = Q;$$

13

Основные свойства схемы «КАБАРЕ»

- Явная;
- Устойчива при $0 < CFL < 1$;
- Дает точное решение при $CFL = 0.5$, $CFL = 1$;
- Второй порядок аппроксимации на неравномерных пространственно – временных сетках;
- Консервативная;
- Обладает однопараметрическим семейством квадратичных законов сохранения;
- Бездиссипативна;
- Имеет максимально компактный вычислительный шаблон;
- Минимальные дисперсионные ошибки;
- Прямое использование принципа максимума для нелинейной коррекции потоков;
- Отсутствие настроечных параметров;



Интерполяционно –
характеристический подход

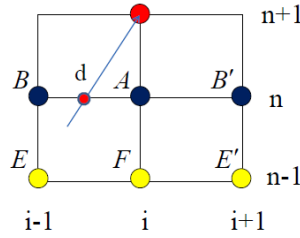
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

Схема Лакса - Вендроффа

$$P_B(x) = \frac{(x_A - x) \cdot (x_{B'} - x)}{(x_A - x_B) \cdot (x_{B'} - x_B)}$$

$$P_A(x) = \frac{(x_B - x) \cdot (x_{B'} - x)}{(x_B - x_A) \cdot (x_{B'} - x_A)}$$

$$P_{B'}(x) = \frac{(x_A - x) \cdot (x_B - x)}{(x_A - x_{B'}) \cdot (x_B - x_{B'})}$$



$$\varphi_i^{n+1} = P_B(-r) \cdot \varphi_B + P_A(-r) \cdot \varphi_A + P_{B'}(-r) \cdot \varphi_{B'}; \quad r = c \cdot \tau / h$$



Интерполяционно –
характеристический алгоритм

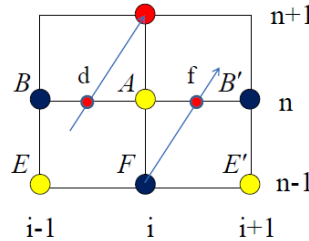
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

Схема Крест

$$P_B(x) = \frac{(x_A - x) \cdot (x_{B'} - x)}{(x_A - x_B) \cdot (x_{B'} - x_B)}$$

$$P_f(x) = \frac{(x_B - x) \cdot (x_{B'} - x)}{(x_B - x_f) \cdot (x_{B'} - x_f)}$$

$$P_{B'}(x) = \frac{(x_A - x) \cdot (x_B - x)}{(x_A - x_{B'}) \cdot (x_B - x_{B'})}$$



$$\varphi_i^{n+1} = P_B(-r) \cdot \varphi_B + P_A(-r) \cdot \varphi_A + P_f(-r) \cdot \varphi_f; \quad r = c \cdot \tau / h$$



Интерполяционно –
характеристический алгоритм

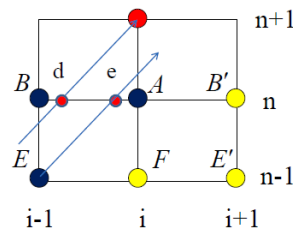
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

Схема Айзерлиса (КАБАРЕ)

$$P_B(x) = \frac{(x_A - x) \cdot (x_e - x)}{(x_A - x_B) \cdot (x_e - x_B)}$$

$$P_e(x) = \frac{(x_B - x) \cdot (x_A - x)}{(x_B - x_e) \cdot (x_A - x_e)}$$

$$P_A(x) = \frac{(x_e - x) \cdot (x_B - x)}{(x_e - x_A) \cdot (x_B - x_A)}$$

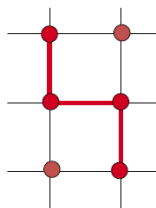


$$\varphi_i^{n+1} = P_B(-r) \cdot \varphi_B + P_A(-r) \cdot \varphi_A + P_e(-r) \cdot \varphi_e; \quad r = c \cdot \tau / h$$

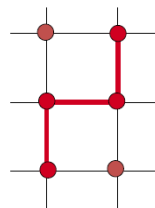


Схема Айзерлиса (КАБАРЕ)

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_{i+1}^n}{\tau} + \frac{\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1}}{\tau} \right\} + c \cdot \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{h} = 0$$



$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\psi_i^{n+1} - \psi_i^n}{\tau} + \frac{\psi_{i+1}^n - \psi_{i+1}^{n-1}}{\tau} \right\} - c \cdot \frac{\psi_{i+1}^n - \psi_i^n}{h} = 0$$



Основные отличия схемы «КАБАРЕ» от схемы «Upwind Leapfrog»

- КАБАРЕ представлена в виде закона сохранения;
- В КАБАРЕ используются два типа переменных – консервативные и потоковые;
- КАБАРЕ – двухслойная схема с максимально компактным вычислительным шаблоном;
- В КАБАРЕ органично встроен монотонизатор нового типа на основе наиболее общего принципа – принципа максимума.

Частные решения, характеристическое уравнение

Будем искать частные решения в виде:

$$\phi_j^{(n)} = \exp(i \cdot [\omega \tau n - khj]) ; \quad kh \in [0, 2\pi] ;$$

Полагая $q_{kh} = \exp(i\omega\tau)$

для схемы Айзерлиса получаем характеристическое уравнение:

$$q_{kh}^2 - q_{kh}(1 - e^{-ikh})(1 - 2r) - e^{-ikh} = 0 ;$$

Корни характеристического уравнения:

$$q_{kh,1} = -b/2 + \sqrt{D} ; \quad q_{kh,2} = -b/2 - \sqrt{D} ;$$

$$b = -(1 - e^{-ikh})(1 - 2r) ; \quad D = b^2/4 - d ; \quad d = -e^{-ikh} ;$$

Диссипация и дисперсионные поверхности

Модуль перехода (диссипативная поверхность)

как функция двух аргументов $(0 \leq r \leq 1) ; (0 \leq kh \leq 2\pi) ;$

$$|q_1| = abs[q_1(kh, r)] ; \quad |q_2| = abs[q_2(kh, r)] ;$$

$$r \in [0, 1] ; \quad kh \in [0, 2\pi] ;$$

Относительный набег фазы (дисперсионная поверхность)

как функция двух аргументов $(0 \leq r \leq 1) ; (0 \leq kh \leq 2\pi) ;$

$$\gamma_1(kh, r) = \frac{1}{r \cdot kh} \arctg \{ \text{Im}(q_1) / \text{Re}(q_1) \} ;$$

$$\gamma_2(kh, r) = \frac{1}{r \cdot kh} \arctg \{ \text{Im}(q_2) / \text{Re}(q_2) \} ;$$



Стохастические свойства однородной изотропной турбулентности

Спектральная плотность кинетической энергии

$$dE_{kin} = E_k(|k|) \cdot d|k|$$

Структурные функции

$$\delta v_i = |v_i(\mathbf{r}+1) - v_i(\mathbf{r})| ; \quad S_q(l) = \langle \delta v_i^q \rangle$$

В одномерном случае: $E_k(k) \propto k^{-2} ; \quad S_q(l) \propto (\varepsilon_u \cdot l)^{q/2}$

В двумерном случае: $E_k(k) \propto k^{-3} ; \quad S_q(l) \propto (\varepsilon_{sc}^{q/3} \cdot l^q)$

В трехмерном случае:

Закон Колмогорова: $E_k(k) \propto k^{-5/3} ; \quad \delta v_l \sim (\varepsilon_s \cdot l)^{1/3} \longrightarrow S_q(l) \propto (\varepsilon_s \cdot l)^{q/3}$

Закон Колмогорова-Обухова:

В области доминирования каскада спиральности:

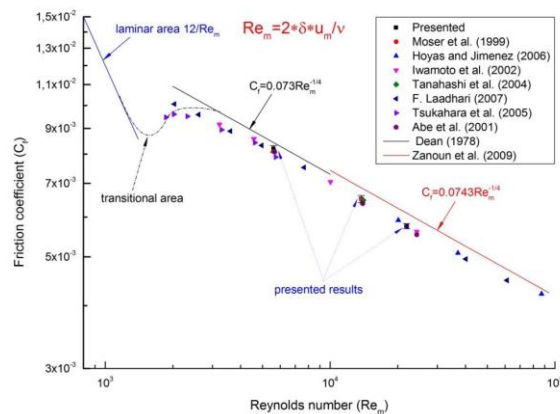
$$E_k(k) \propto k^{-7/3} ; \quad \delta v_l \propto (\varepsilon_H \cdot l^2) \longrightarrow S_q(l) \propto (\varepsilon_H \cdot l^2)^{q/3}$$

43

ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИСТЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

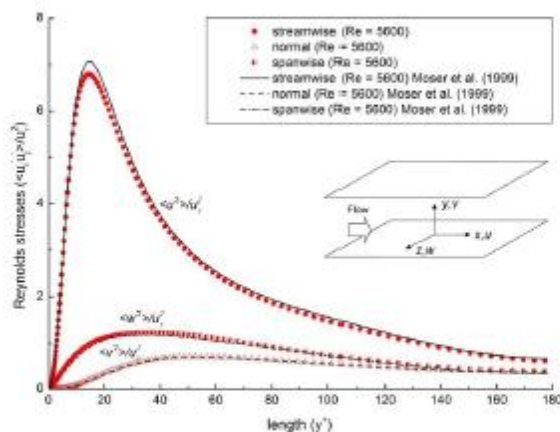
- Моделируется течение между двумя плоскими бесконечными пластинами для получения осредненных характеристик пристенного турбулентного течения

- Направление течения вдоль оси X, вдоль этого направления каждый шаг по времени проводится корректировка расхода. По направлениям X, Z заданы периодические условия на скорость и давление
- На верхней и нижней горизонтальной плоскости задаются условия прилипания
- Расчет проводится при трех числах Рейнольдса $Re_m = 5600, 13760, 21900$, чтобы сравниться с DNS расчетами Moser/Kim/Moin (1987 - 1999)
- Сетка ортогональная – $512 \times 256 \times 256$ ячеек, используется сгущение сетки вблизи стенок для учета особенностей течения в пограничном слое. Размеры области - $4\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta$ (δ – полувысота канала) для $Re_m = 5600$, и $2\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta$ для $Re_m = 13760, 21900$

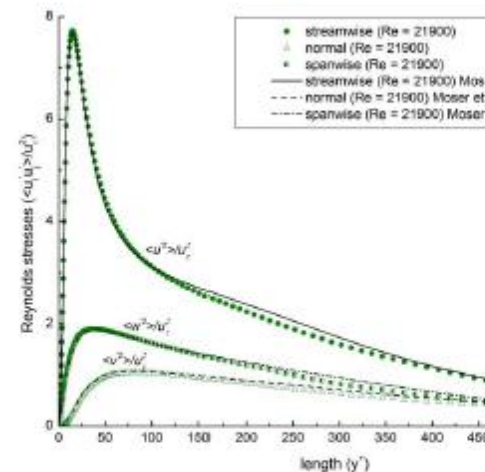


Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса

Компоненты тензора турбулентных напряжений $Re_m = 5600$

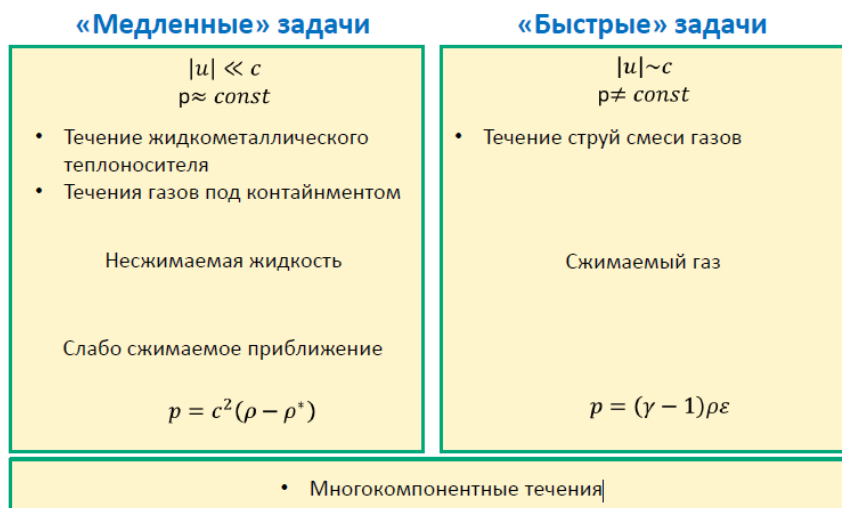


Компоненты тензора турбулентных напряжений $Re_m = 21900$



Результаты расчетов сравнивались с Moser et al. 1999 и показали хорошее совпадение в пристенной области. Отличие наблюдается в только области турбулентного ядра. Полученные коэффициенты сопротивления более близки к экспериментальным данным.

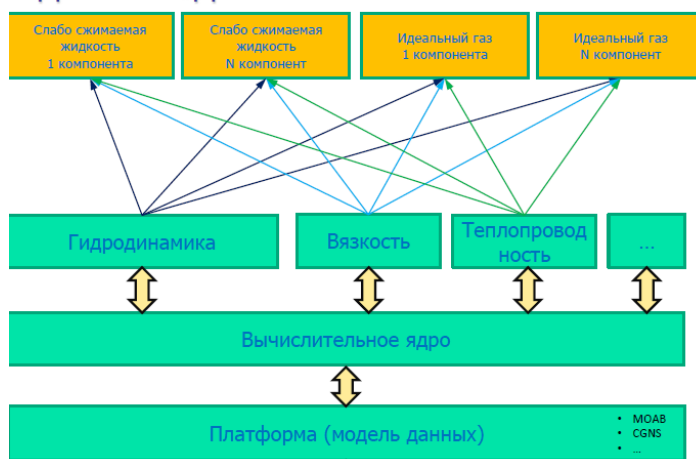
Трехмерный код КАБАРЕ для расчета нестационарных задач тепломассопереноса без использования моделей турбулентности и настроечных параметров



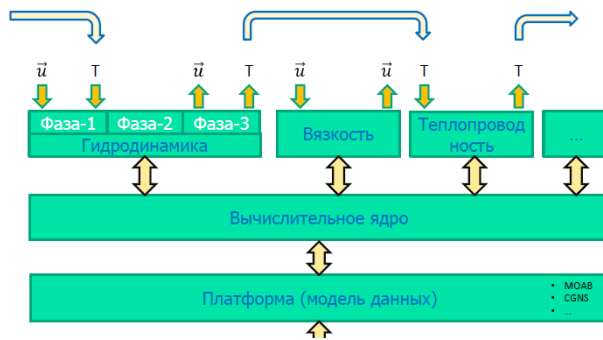
Особенности кода CABARET-ST

- 1) Код CABARET-ST представляет собой реализацию методики КАБАРЕ для проведения массивных параллельных вычислений на кластерных ЭВМ задач гидродинамики на неструктурированных гексагональных сетках
- 2) Реализован на языке C++
- 3) Программная платформа использует библиотеку сеточных баз данных – ITAPS MOAB (A Mesh-Oriented datABase). Библиотека MOAB поддерживает все необходимые базовые операции для распределенных сеточных данных, позволяет работать как со структурированными, так и неструктурированными сетками, поддерживает все виды ячеек, включая произвольные многоугольники и многогранники.
- 4) Формат хранения данных – HDF5 (Иерархический формат данных). Позволяет работать с данными большого размера. Обеспечивает высокую скорость доступа к данным.
- 5) Реализована возможность асинхронной передачи сообщений (без блокировки) с использованием процедуры MPI_Isend
- 6) Реализована возможность проведения расчетов с асинхронными шагами по времени. Разбиение на партии в этом случае проводится с учетом вычислительной сложности ячеек сетки

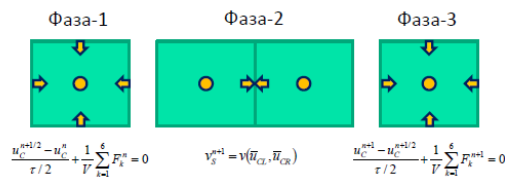
Единый код



1. Задержка «готовность – потребность»

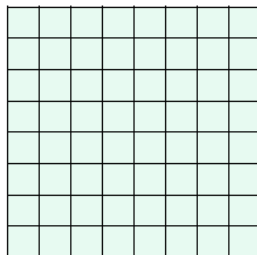


2. Порядок вычислений



Параллельные вычисления:

- Все консервативные переменные вычисляются локально
- Вклад в потоковую переменную от консервативных вычисляется локально
- Вклады в потоковые переменные пересылаются между партициями
- Потоковые переменные вычисляются на каждой партиции единым образом



1. Вычисления инвариантов с одной стороны на интерфейсных гранях
2. Отправка инвариантов в соседние партиции
3. Вычисления инвариантов на внутренних гранях
4. Вычисление потоковых переменных на внутренних гранях
5. Получение инвариантов от соседних партиций
6. Вычисление потоковых переменных на интерфейсных гранях

Турбулентность – сложное явление и для его описания используются различные подходы

Турбулентность можно рассматривать как совокупность вихрей различного размера, от колмогоровского масштаба до когерентных структур

Все переменные в турбулентном потоке можно разделить на осредненную и пульсационную составляющие

Турбулентные пульсации как случайные величины рассматриваются в рамках статистической теории турбулентности, дисперсия характеризует их интенсивность

Энергетический спектр характеризует распределение энергии по волновым числам

Процесс передачи энергии от крупных вихрей к мелким играет фундаментальную роль и называется каскадный перенос энергии

Билет 38. Использование суперкомпьютеров для решения задач молекулярного моделирования

1 Молекулярное моделирование

С созданием новых параллельно/векторных суперкомпьютеров и специализированных вычислительных кластеров методы молекулярного моделирования становятся реальным инструментом изучения в биоинженерии, нанотехнологии и материаловедении. Они позволяют исследовать детальную картину процессов на атомно-молекулярном масштабе и выявлять технологически интересные явления с большой долей вероятности, производя вычисления над системами от сотен тысяч до миллиарда частиц. Молекулярное моделирование служит практическим инструментом в разработке новых материалов, нанобиомедицине, в дизайне новых лекарств, протеомике.

Молекулярное моделирование применяется в решении больших систем с использованием суперкомпьютеров. Рассмотрим на примере следующих моделей:

- квантовомеханических уравнений (метод «из первых принципов»);
- метод классической молекулярной динамики со связями и метод Монте-Карло;
- нелинейные модели сплошной среды.

Выделим **ряд специфических свойств наносистем**, которые определяют задачи создания алгоритмов и программ.

1. Большое число молекул в нанокластере, зерне. Количество молекул существенно превышает возможности имевшихся ранее программ квантовой химии «из первых принципов» («ab initio»). Современные программы «ab initio» способны рассчитывать наносистемы, содержащие десятки тысяч молекул.
2. Нестабильность наносистем. Необходимость устойчивого расчета систем, близких к границе устойчивости.
3. Расчет фазовых переходов с многими границами, узких слоев, окружающих движущиеся границы фазовых переходов.
4. Необходимость решения задач многомерной оптимизации потенциальной энергии в условиях, когда надо разрешать близкие минимумы и находить седловые точки.
5. Химические формулы неоднозначно определяют структуру молекулярного соединения. Математически это означает, что задача поиска молекулярной структуры, имеющей желаемые свойства не обладает единственным решением.

2 Квантовомеханический уровень

Задача квантовомеханических вычислений *из первых принципов* состоит в решении уравнений квантовой механики и расчете поверхности потенциальной энергии системы, межмолекулярных связей, электронной конфигурации.

2.1 Пример моделирование молекулярного переключения.

При построении моделей молекулярной динамики «из первых принципов» исходят из следующего:

1. Потенциал взаимодействия между заряженных частиц – **закон Кулона. Нет подгоночных параметров.**
2. **Наномасштаб.** При моделировании электронной структуры молекул характерный пространственный масштаб $\sim 10^{-10}$ и масштаб времени $\sim 10^{-15}$ с.
3. **Метод моделирования наносистем** — молекулярная динамика из первых принципов **CPMD (Car-Parrinello Molecular Dynamics)**, – математическая модель молекулярной динамики Кар-Парринелло на основе приближения Борна-Оппенгеймера.

В приближении Борна-Оппенгеймера считается, что движение массивных ядер может быть описано в классическом приближении. Силы действующие на ядра со стороны электронов, рассчитываются на основе решения уравнения Шредингера для электронов в основном состоянии. Электронная структура получается для каждой молекулы решением стационарного уравнения Шредингера для каждого шага классической молекулярной динамики ядер. Мы будем использовать квантовомеханическую формулировку, основанную на уравнениях функционала плотности («DFT»). Уравнения модели Кар-Парринелло записываются в виде:

$$\begin{aligned} M_I \frac{d^2 R_I}{dt^2}(t) &= -\frac{\partial}{\partial R_I} E_{KS}[\{\psi_i\}, \{R_I\}], \\ \mu_i \frac{d^2 \psi_i}{dt^2}(t) &= -\frac{\partial}{\partial \psi_i^*} E_{KS}[\{\psi_i\}, \{R_I\}] + \sum \Lambda_{ij} \psi_j, \end{aligned} \quad (1)$$

где M_I и R_I – масса и координата ядра I ,
 μ_i – фиктивная масса электрона,
 ψ_i – орбитали Кона-Шэма,
 E_{KS} – энергия Кона-Шэма.

Последний член в уравнении (1) описывает голономные связи, которые учитываются требованием ортогональности орбиталей. Силы, действующие на ионы $-\frac{\partial}{\partial R_I} E_{KS}$ и электроны $-\frac{\partial}{\partial \psi_i^*}$, вычисляются на каждом шаге моделирования так же, как и множители Лагранжа Λ_{ij} . Энергия Кона-Шэма определяется выражением

$$\begin{aligned} E_{KS}[\{\psi_i\}, \{R_I\}] &= \sum_i^{OCC} f_i \int \psi_i^*(r) \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 \psi_i(r) \right] dr + \\ &+ \int U_{ext}(r) \rho(r) dr + \frac{1}{2} \int \int \frac{\rho(r) \rho(r')}{|r - r'|} dr dr' + E_{XC}[p] + E_I[\{R_I\}], \end{aligned}$$

где U_{ext} – ионный потенциал,
 $\rho(r) = \sum_i f_i |\psi_i|^2$ – плотность заряда электронов,
 f_i – числа заселенности,
 E_{XC} – обменно-корреляционная энергия,
 E_I – электростатическое ионное взаимодействие.

Используется разложение волновых функций ψ_i по плоским волнам. Орбитали Кона-Шэма записываются в виде:

$$\psi_i(r) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_k c_i(k) e^{ikr}$$

где Ω – объем ячейки,

k – вектор обратной решетки,

$c_i(k)$ – Фурье-коэффициент орбитали i .

Идея Кар-Парринелло состоит в использовании квантовомеханического разделения временных масштабов быстрого электронного движения и медленного движения ядер. Этот метод реализован в численном квантовомеханическом коде молекулярной динамики CPDM. Движение всех ядер используется для нахождения пути реакции. Основное внимание уделяется вычислению барьера на поверхности свободной энергии (FES), который необходимо преодолеть для прохождения реакции переключения. Нахождение пути реакции на рифленном ландшафте свободной энергии (метод методинамики, рассмотрен далее) представляет важный шаг в понимании механизма реакции изомеризации. Поиск пути химической реакции представляет собой трудную задачу нахождения седловых точек в многомерном пространстве.

Моделирование молекулярного переключения состоит из следующих последовательных шагов. Вначале проводится оптимизация геометрии молекулы. На этом этапе устанавливается атомный состав молекулы и вычисляются равновесные межатомные связи, которые соответствуют минимальной энергии. Затем проводится термализация молекулы взаимодействием с термостатом Нозе-Хувера и достигается термодинамическое равновесие.

4. **Подход требует использования суперкомпьютеров и эффективных параллельных вычислений для описания больших молекулярных систем ~ 25000 атомов.**
5. **Масштабируемость CPMD кодов.**

2.2 Вычисления на суперкомпьютере

Моделирование молекулярного переключения проводилось на суперкомпьютере со следующими характеристиками:

- суперкомпьютер IBM Blue Gene/P с 2048 процессорами, каждый из которых состоит из 4 ядер, с общей пиковой производительностью 27.8 терафлопс,
- расчеты велись для систем, состоящих из 82, 130, 178 атомов,
- для системы состоящей из 82 атомов, в расчете учитывалось 129 электронных орбиталей, 540000 плоских волн для каждой орбитали,
- регулярные расчеты молекулярной динамики проводились с временным шагом $\tau_{MD} = 0.1125$ фс,
- пространственная сетка элементарной ячейки содержала $320 \times 320 \times 192$ узлов,
- **один расчет для 82 атомов занимал 20 часов процессорного времени на 512 узлах**

2.3 Вычисление профиля поверхности свободной энергии методом метадинамики.

Стохастический немарковский метод (метод метадинамики) в рамках молекулярной динамики позволяет строить поверхность свободной энергии вдоль координационной переменной, определяющее главное направление реакции.

Оптимизированная геометрия молекулы нафталоцианина в состоянии первого изомера показана на рис. 1а и в состоянии второго изомера – рис. 1б. Молекула состоит из атомов азота, углерода и водорода. Реакция водородной изомеризации состоит в том, что два атома водорода в центральной полости молекулы под действием внешнего потенциала, создаваемого STM, переходят от одних атомов азота к двум другим атомам азота. Такой процесс переключения эквивалентен повороту молекулы на 90 градусов в плоскости молекулы, причем ее геометрия во втором состоянии та же.

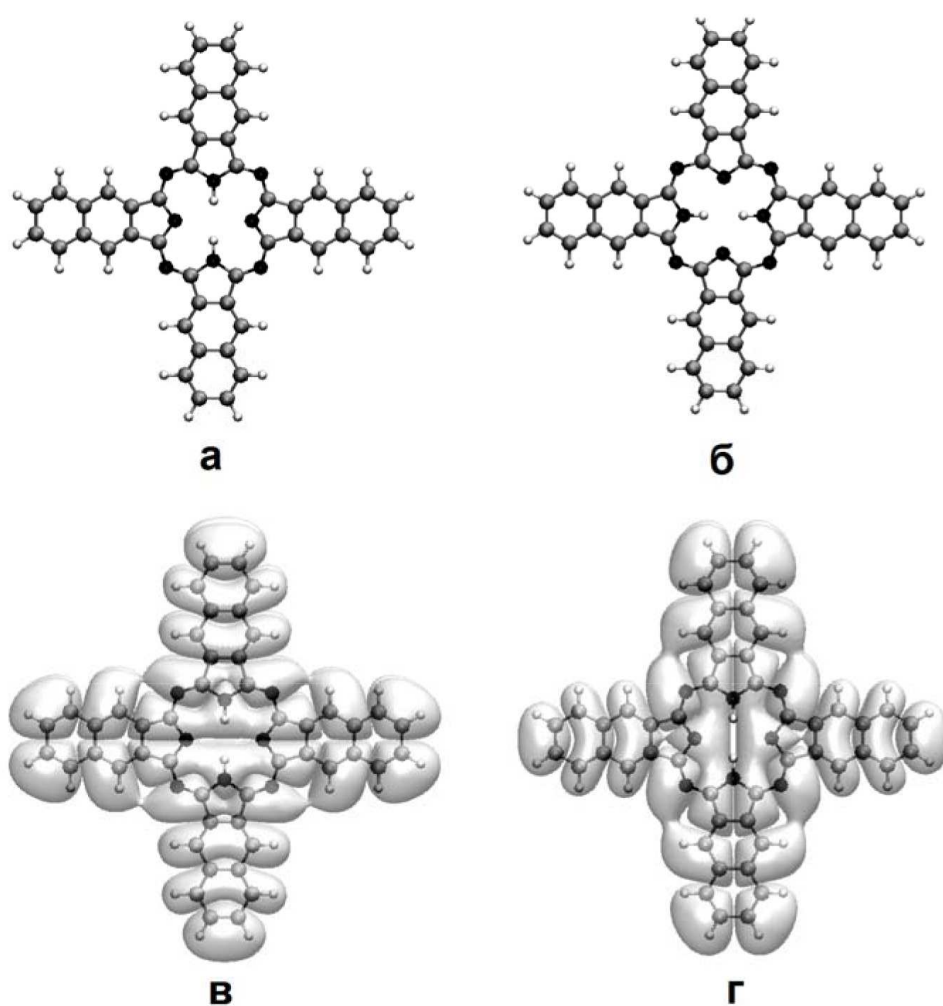


Рис. 1: Оптимизированная геометрия молекулы нафталоцианина на различных стадиях процесса метадинамики, вычисленные с помощью кода CPMD: а) начальная конфигурация молекулы нафталоцианина, б) конечная конфигурация, обладающая геометрией второго изомера, в) рассчитанная структура молекулярных орбитали LUMO и г) орбитали LUMO+1. Белые шары соответствуют ядрам водорода, черные – ядрам азота, серые – ядрам углерода.

Определим вспомогательную переменную в следующей форме:

$$s_1(H_1, H_2, N_1, N_2) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{R_{H_1N_1}}{R_0}\right)^6}{1 - \left(\frac{R_{H_1N_1}}{R_0}\right)^{12}} + \frac{1 - \left(\frac{R_{H_1N_2}}{R_0}\right)^6}{1 - \left(\frac{R_{H_1N_2}}{R_0}\right)^{12}} + \frac{1 - \left(\frac{R_{H_2N_1}}{R_0}\right)^6}{1 - \left(\frac{R_{H_2N_1}}{R_0}\right)^{12}} + \frac{1 - \left(\frac{R_{H_2N_2}}{R_0}\right)^6}{1 - \left(\frac{R_{H_2N_2}}{R_0}\right)^{12}} \right\},$$

где $R_{H_iN_j}$ – расстояние между i -м атомом водорода и j -м атомом азота,

R_0 – равновесное расстояние между атомом водорода и атомом азота, равное 1.05 Å.

Такая координационная переменная является несимметричной по углу вращения атома водорода. Поэтому используем координационную переменную в следующей форме:

$$s = s_1(H_1, H_2, N_1, N_2) - s_1(H_1, H_2, N_3, N_4)$$

Целью метода метадинамики является эффективный анализ поверхности свободной энергии $F(s)$ как функции s (длины связей и торсионные углы).

Свободная энергия записывается в следующей форме:

$$F(s) = -k_B T \ln \left(\int \exp \left(-\frac{U(\{R_I\})}{k_B T} \right) d\{R_I\} \right),$$

где k_B – константа Больцмана,

T – абсолютная температура,

Уравнение метадинамики

$$\begin{aligned} \mu \ddot{s} &= -k(s - S(\{R_J\})) - \frac{\partial}{\partial s} V(s, t) \\ M_I \ddot{R}_I &= -\nabla_{R_I} U(R_I) - \frac{\partial S(\{R_J\})}{\partial R_I} k(S(\{R_J\}) - s). \end{aligned}$$

где $V(s, t)$ – зависящий от времени искусственный потенциал, который добавляется в систему вдоль траектории в моменты t_i :

$$V(s, t) = - \sum_{t_i < t} H_i \cdot \exp \left[-\frac{(s(t) - s^i)^2}{2W_i^2} \right].$$

Этот потенциал есть сумма отталкивающих потенциальных холмов в форме гауссианов, каждый из которых имеет высоту H . Метадинамика s определяет эффективность, с которой исследуется поверхность свободной энергии.

2.4 Численная параллельная реализация CPMD на супер-ЭВМ

Наиболее затратной в смысле времени вычислений является часть задачи, связанная с параллельным расчетом электронной структуры молекулы. Уравнения Кона-Шэма (в теории функционала плотности) приводят к необходимости решения нелинейной задачи на собственные значения для волновых функций. Если N_e – число электронов в системе, тогда вычислительная сложность используемого алгоритма масштабируется как $O(N_e^3)$. Для решения задачи используется прямое и обратное преобразования Фурье. Решение представляется в виде трехмерного ряда Фурье для каждого n -го электрона. Для вычисления коэффициентов разложения используется трехмерный метод быстрого преобразования Фурье (3dFFT).

Параллельные стратегии. Несколько уровней распараллеливания.

- **Крупноблочное распараллеливание** применяется на распределенной памяти. На основе **использования функций MPI** производится распределение коэффициентов Фурье волновых функций для всех электронных состояний на все процессы.
- **3dFFT-метод** (трехмерный метод быстрого преобразования Фурье) используется для перехода из реального пространства в Фурье-пространство и обратно. Распределение данных производится так, что число обменов с поддержанием загрузки в обоих пространствах минимизируется.
- **OpenMP-распараллеливание** применяется для распараллеливания длинных циклов, с общей памятью на узле.
- **Taskgroups-метод** использует организацию процессоров в группы. Процессоры организованы как двумерная сетка. Такая схема требует в два раза меньше коммуникаций, чем обычная схема. Процессорные группы могут быть оптимально распределены по трехмерному тору межпроцессорных связей Blue Gene/P.
- **Методы копирования** используются для вычисления интегралов по траекториям в молекулярной динамике при кантовании ядер. Многомерная метадинамика.

Отражение на архитектуру Blue Gene/P и использование встроенных процедур MPI показано на рис. 2

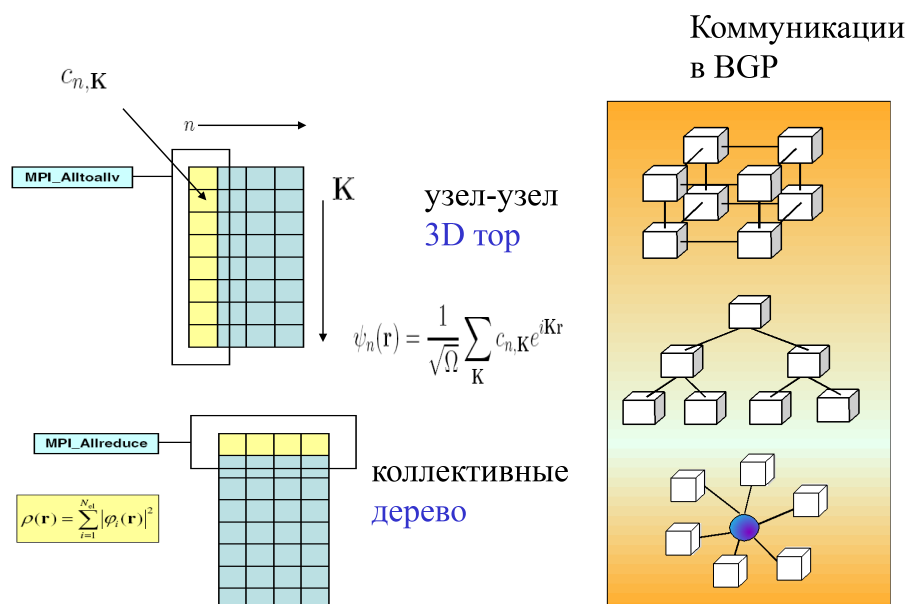


Рис. 2: Стратегии распараллеливания в коде молекулярной динамики «из первых принципов» CPMD

2.5 Пример разработки инновационных диэлектриков.

Одним из примеров использования суперкомпьютера, как принципиального устройства при создании нанотехнологий, служит разработка инновационных диэлектриков.

Для их создания в суперкомпьютерах IBM и Intel, применяют гафний, кислород и кремний – технология 2008 года. Для моделирования состава диэлектрика использовалось:

- суперкомпьютер IBM – Blue Gene/L с 4096 процессорами,
- метод исследования – квантовый молекулярный метод «из первых принципов»,
- модели включали 600 атомов и 5000 электронов,
- всего исследовалось 50 комбинаций силикатов гафния,
- на изучение одной комбинации суперкомпьютеру требовалось – 5 дней,
- полное исследование заняло $5 \times 50 = 250$ дней (где мощный ноутбук потребует около 700 лет вычислений).

3 Методы классической молекулярной динамики со связями и методы Монте-Карло

Этот уровень моделирования широко используется в нанобиомедицине, дизайне лекарств, протеомике.

В этих моделях используются вычисленные силы связи между атомами, рассчитанными на предыдущем шаге моделирования. Движение ядер описывается классическими законами механики, а связи и силы определяются квантовомеханическими расчетами (приближение Борна-Оппенгеймера). Записываются уравнения Ньютона для каждого ядра, связанного с другими ядрами связями, определяемыми электронной структурой молекул. Силы определяются градиентами поверхности потенциальной энергии.

$$M_i \frac{d^2 R_i}{dt^2} = - \sum_j \frac{\partial U(|R_i - R_j|)}{\partial R_i}.$$

Требуется найти оптимальное расположение ядер, при котором молекулярная структура будет иметь минимум потенциальной энергии. При движении ядер рельеф поверхности потенциальной энергии меняется. В этом методе такой поиск происходит с использованием собственной динамики частиц, которые представляют собой связанные структуры. В задаче появляется температура, которая и определяет термическую неопределенность в окончательном ответе. Температура – средняя кинетическая энергия движения молекул вычисляется на каждом временном шаге. Специальной нормировкой скоростей (или алгоритмами взаимодействия с термостатом) добиваются сходимости процесса к системе с заданной температурой. После достижения термодинамического равновесия вычисляются термодинамические средние. Таким образом решается задача дискретной оптимизации энергии с использованием уравнений динамики Ньютона.

В методе Монте-Карло нет движения молекул, а анализируются вероятные расположения молекулярной системы – статистический ансамбль с заданным микроканоническим распределением. Температура в этом случае является параметром распределения. Для установления термодинамического равновесия и нахождения оптимальной, устойчивой молекулярной структуры обычно требуются сотни миллионов шагов процесса Монте-Карло.

Вычисления длятся много часов даже на современных вычислительных машинах, поэтому параллельные методы здесь крайне необходимы. В методах молекулярной динамики временной шаг имеет порядок 10^{-15} сек. и для моделирования процессов, протекающих даже в микросекундном диапазоне, требуются миллиарды временных шагов.

Принципиальным в определении молекулярной конструкции является та точность, с которой мы можем рассчитать равновесие молекулярной системы. Для одних систем, например, протеинов, растворов полимеров рифленая потенциальная поверхность имеет много слабо отличающихся минимумов. Это малое отличие может привести к нахождению неправильной и поэтому неустойчивой конфигурации. Для систем с жесткими межмолекулярными связями потенциальная функция хорошо определена и даже химические реакции могут быть включены в процесс моделирования. Если ошибки численной модели порядка величин локальных энергетических барьеров, то ее использование может привести к неправильным выводам о функции проектируемого устройства. Модели оптимизации геометрии систем молекул широко используются в настоящее время в, так называемых, молекулярных конструкторах.

4 Нелинейные модели сплошной среды

В этом случае молекулярная система рассматривается как сплошная среда, эволюция которой определяется непрерывными макроскопическими функциями. Уравнения модели получают из общих законов сохранения.

Материальные уравнения, уравнения состояния должны определяться либо из эксперимента, либо из молекулярного моделирования. Как правило, нелинейность зависимости коэффициента диффузии от плотности приводит к нелинейным уравнениям диффузии. Эти модели глобальны (в отличие от моделей кинетики молекул) и учитывают необходимые граничные условия.

Модели сплошной среды широко используются при описании процессов реакции-диффузии, движений границ фазовых переходов, движений стенок магнитных доменов в соответствующих наносистемах.

Билет 30. Архитектурные особенности графических процессоров, направленные на массивно-параллельные вычисления.

CPU - небольшое число мощных, независимых ядер, 3-х уровневый кэш

GPU - вместо ядер потоковый мультипроцессор (streaming multiprocessor, SM):

1. 32 скалярных ядра CUDA cores, ~1.5ГГц
2. 2 Warp Scheduler (warp - 32 ядра)
3. Файл регистров, 128 КБ
4. 2-х уровневый кэш
5. Текстовые юниты
6. 16 Special Function Unit - интерполяция ~ трансцендентная математика один. Точности

Много простых ядер, работающих на небольшой частоте. Небольшие кэши на GPU: 32 ядра делят 64 КБ L1 кэша, общий L2 кэш, L3 нет.

Оперативная память с высокой пропускной способностью и **высокой латентностью**, оптимизированная для коллективного доступа. Так как память с высокой латентностью, то чтобы эффективнее загружать ядра на много нитей и за счет быстрого переключения контекста перекрывать обращения одних нитей вычислениями в других имеется следующая иерархия:

Нить -> warp (32 нити) -> Block (до 32 warp) -> Grid (решетка из блоков)

Block и Grid - 3d, каждая нить, блок получают свои координаты.

На уровне нитей - SIMD - все нити выполняют одно и то же действие с разными данными.

Warp-ы выполняются независимо, называется все - SIMT.

Глобальная память

Расположение в DRAM GPU, до 4ГБ, можно выделять как с хоста, так и с устройства.

Работа оптимизирована так, чтобы отдать максимальное число данных за одно обращение.

Транзакция - загрузка из глобальной памяти пула в 128 байт, начиная с адреса, кратного 128. Взаимодействие идет через кэш. Размер кэш линии L1 - 128 байт, L2 - 32 байта, можно работать не через L1 кэш, тогда транзакции по 32 байта.

Данные хранятся по строкам, чтобы добиться выравнивания по 128 байт, можно воспользоваться CudaMallocPitch - передаем, сколько у нас будет входных данных, возвращаем с учетом padding.

Билет 40

Методы эффективной организации параллельных вычислений на графических процессорах

1) Утилизация латентности памяти

- *Цель:* эффективно загружать Ядра
- *Проблема:* латентность памяти
- *Решение:* CPU: Сложная иерархия кешей

GPU: Много нитей, покрывать обращения одних нитей в память вычислениями в других за счёт быстрого переключения контекста. За счёт наличия сотен ядер и поддержки миллионов нитей (потребителей) на GPU легче утилизировать всю полосу пропускания

2) SIMT (Single instruction, multiple thread) и масштабирование

Виртуальная

- GPU может поддерживать миллионы виртуальных нитей
- Виртуальные блоки независимы (программу можно запустить на любом количестве SM)

Аппаратная

- Мультипроцессоры независимы
- Можно «нарезать» GPU с различным количеством SM

3) Асинхронность в CUDA

Чтобы GPU больше времени работало в фоновом режиме, параллельно с CPU, некоторые вызовы являются асинхронными. Отправляют команду на устройство и сразу возвращают управление хосту. К таким вызовам относятся:

- Запуски ядер (если CUDA_LAUNCH_BLOCKING не установлена на 1)
- Копирование между двумя областями памяти на устройстве
- Копирование с хоста на устройство менее 64KB
- Копирования, выполняемые функциями с окончанием *Async
- cudaMemSet – присваивает всем байтам области памяти на устройстве одинаковое значение (чаще всего используется для обнуления)

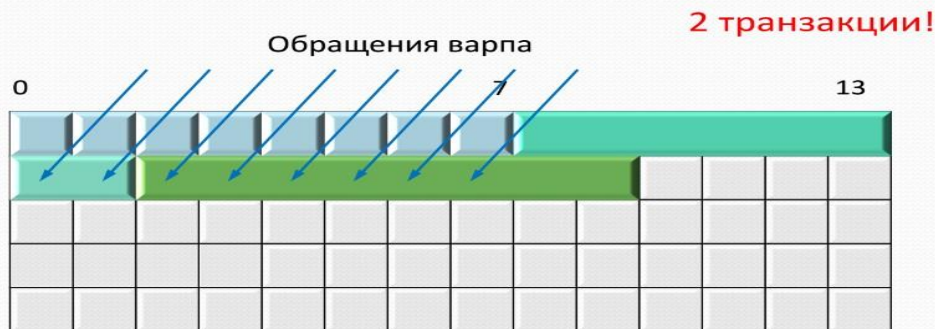
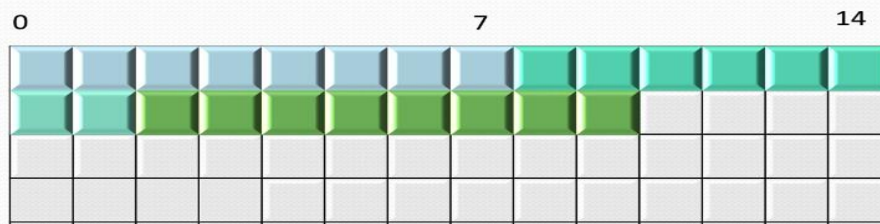
4) Работа с глобальной памятью

- Расположена в DRAM GPU
- Объем до 4Gb
 - Параметр устройства totalGlobalMem
- Кешируется в кешах L1 и L2
 - L1 – на каждом мультипроцессоре (максимальный размер – 48KB, минимальный – 16KB)
 - L2 – на устройстве (максимальный размер - 768 KB, параметр устройства l2CacheSize)

Общие принципы эффективной работы:

- Обращения нитей варпа в память должны быть пространственно-локальными
- Начала строк матрицы должны быть выровнены

Пусть транзакция – $8 \cdot 4 = 32$ байта, адрес транзакции выровнен по 32 байта
Если ширина матрицы не кратна 32 байтам – большая часть строк не выровнена



- Матрицы хранятся в линейном виде, по строкам
- Пусть длина строки матрицы – 480 байт (120 float)
 - обращение – `matrix[idy*120 + idx]`

Адрес начала каждой строки, кроме первой, не выровнен по 128 – обращения варпов в память будут выполняться за **2 транзакции**



- Дополним каждую строку до размера, кратного 128 байтам – в нашем случае, $480 + 32 = 512$, это наш **pitch – фактическая ширина в байтах**
- Эти байты никак не будут использоваться, т.е. $32/512=6\%$ лишней памяти будет выделено (Но для больших матриц эта доля будет существенно меньше)
- Зато каждая строка будет выровнена по 128 байт
 - Обращение `matrix[idy*128+ idx]`



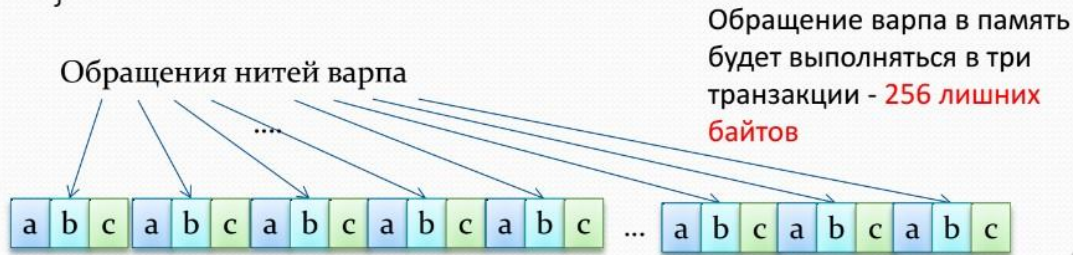
Активация



- Использование массивов структур

```
struct example {
    int a;
    int b;
    int c;
}

__global__ void kernel(example * arrayOfExamples) {
    int idx = threadIdx.x + blockIdx.x * blockDim.x;
    arrayOfExamples[idx].c =
        arrayOfExamples[idx].b + arrayOfExamples[idx].a;
}
```



Активация

```
struct example {
    int *a;
    int *b;
    int *c;
}

__global__ void kernel(example arrayOfExamples) {
    int idx = threadIdx.x + blockIdx.x * blockDim.x;
    arrayOfExamples.c[idx] =
        arrayOfExamples.b[idx] + arrayOfExamples.a[idx];
}
```



- Выбор режима Кеша L1

Кеш может работать в двух режимах: 16 KB и 48KB. Возможные режимы

- cudaFuncCachePreferNone – без предпочтений (по умолчанию). Выбирается последняя использованная конфигурация. Начальная конфигурация – 16KB L1
- cudaFuncCachePreferShared - 16KB L1
- cudaFuncCachePreferL1 - 48KB L1

Если в ядре не используется общая память, то заведомо стоит включить cudaFuncCachePreferL1.

- Избегать косвенной адресации
 - Использование косвенной адресации нежелательно, поскольку требует двух чтений из памяти (сначала A[i], потом A[i][j])
 - A[i] для разных нитей варпа скорее всего будут в одной кеш- линии → одно обращение к кешу
 - Но A[i][j] в общем случае могут быть разбросаны

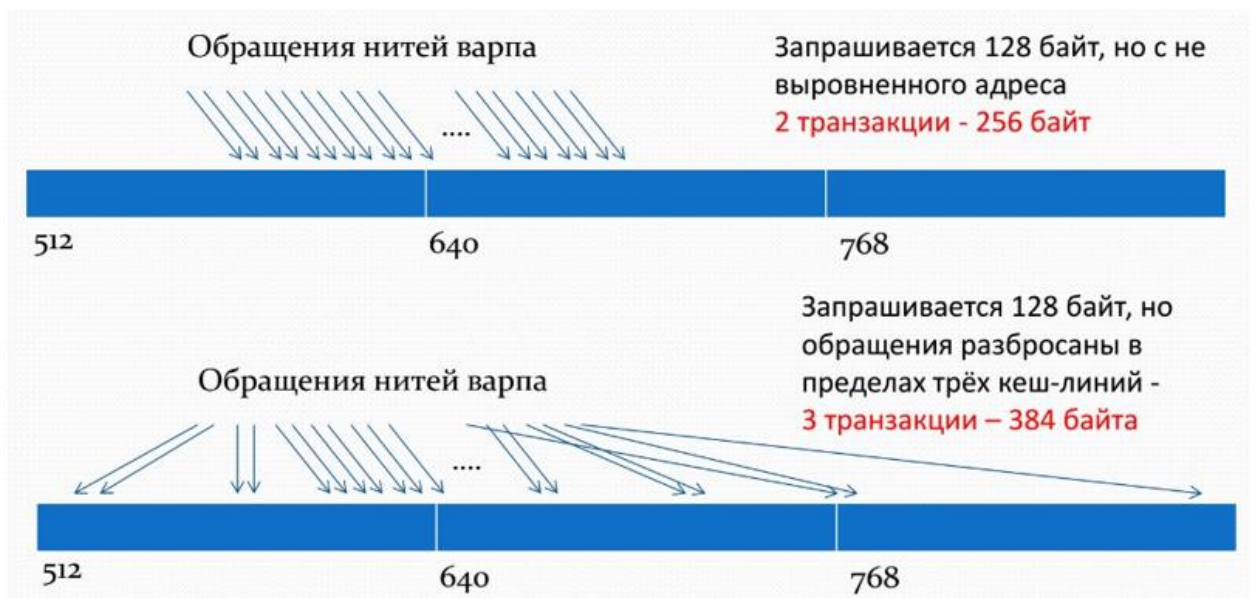
- Принципиального решения нет! Скорее всего придется переработать алгоритм.
- Избегать обращений нитей варпа к столбцу матрицы

Матрица расположена по строкам, а обращение происходит по столбцам



Решение – хранить матрицу в транспонированном виде! (В этом случае обращения по столбцам превратятся в обращения к последовательным адресам, а выделять память под транспонированную матрицу также через `cudaMallocPitch`)

- В случае сильно разряженного доступа проверять работу с отключенным кэшем
 - Транзакция – выполнение загрузки из глобальной памяти сплошного отрезка в 128 байт, с началом кратным 128
 - Инструкция обращения в память выполняется одновременно для всех нитей варпа
 - Выполняется столько транзакций, сколько нужно для покрытия обращений всех нитей варпа
 - Если нужен 1 байт – все равно загрузится 128.



- Ядра взаимодействуют не с памятью напрямую, а с кешами
- Транзакция – выполнение загрузки кеш – линии
 - У кеша L1 кеш – линии 128 байт, у L2 – 32 байта
 - Кеш грузит из памяти всю кеш линию, даже если нужен один байт
- Можно обращаться в память минуя L1
 - Транзакции будут по 32 байта